

Естественный алгоритм

Естественный алгоритм легко найти, но трудно поверить или проверить, что он срабатывает (осуществим, достигает цели, оптимален).

1. Из Москвы выходит 1001 одна авиалиния, из Дальнего — одна авиалиния, из каждого другого города — 10 авиалиний. Докажите, что из Москвы можно добраться рейсовыми самолетами в Дальний (возможно, с пересадками).
2. В ряд лежат 100 камней. За один раз разрешается сравнить два рядом лежащих камня на чашечных весах без гирь, и, если левый тяжелее правого, поменять их местами. Как расположить камни в порядке возрастания весов за минимально возможное число взвешиваний?
3. а) Клетки доски 100×100 заполнены целыми числами. За одну операцию разрешается сменить знак у всех 100 чисел одной строки, столбца, диагонали или квадрата 10×10 . Докажите, что с помощью этих операций можно добиться, чтобы сумма чисел в каждой такой сотне стала неотрицательной.
б) То же, но числа действительные.
4. Есть ряд из 100 окопов. Известно, что в одном из нечетных окопов прячется робот. Одним выстрелом пушка может накрыть любой окоп. Если робот там, он погибает, а если нет — обязательно перебегает в соседний окоп (пушка этого не видит). Есть ли способ наверняка поразить робота за несколько выстрелов?
5. Петя задумал натуральное число от 2 до 100. Вася каждым ходом называет натуральное число. Если он называет текущее петино число, то Петя говорит «Я проиграл». Иначе Петя меняет текущее число по такому правилу: если его текущее число p делится на названное Васей число v , то он меняет p на p/v , иначе — на $p \cdot v$. Может ли Вася наверняка выиграть?
6. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуку. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после слова «стоп» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?
7. Из двух шахматных досок сделали два лабиринта, вставив кое-где перегородки между клетками. В каждый поставили по ладье. Известно, что в каждом лабиринте ладья может дойти до правой верхней клетки. Петя может отдавать команды «вправо», «влево» «вверх» «вниз» двум ладьям одновременно. Ладья сдвигается в указанном направлении на одну клетку, но остается на месте, если сдвигу мешает край доски или перегородка. Доказать, что Петя может отдать такую последовательность команд, чтобы обе ладьи после некоторого хода оказались в правом верхнем углу.
8. Есть несколько квадратов общей площадью 1. Докажите, что их можно разместить без наложений в квадрате площади 2.
9. Есть n мужчин и n женщин, каждый имеет свою шкалу предпочтений для лиц противоположного пола. Допустим, мы их переженели. Назовем пару (Он, Она) разводоопасной, если Он Ей нравится больше мужа, а Она Ему — больше жены. Докажите, что можно всех переженить так, чтобы разводоопасных пар не возникло.

Для самостоятельного решения

ЕА1. В Шпионии все авиарейсы поделены между двумя компаниями так, что из каждого города выходит поровну рейсов каждой компании. Известно, что из г. Моссадква в г. Фсбург можно добраться авиарейсами, возможно, с пересадками. Агенту 007 приказано менять авиакомпанию при каждой пересадки. Докажите, что он может добраться из Моссадквы в Фсбург.

ЕА2. Есть ряд из 100 окопов. Известно, что в одном из окопов прячется робот. Одним выстрелом пушка может накрыть любой окоп. Если робот там, он погибает, а если нет — обязательно перебегает в соседний окоп (пушка этого не видит). Есть ли способ наверняка поразить робота за несколько выстрелов?

ЕА3. а) Из шахматной доски сделал лабиринт, вставив кое-где перегородки между клетками. На некоторую клетку поставили ладью так, что она может дойти до правой верхней клетки. Петя лабиринт видит, а ладью нет. Он может отдавать команды «вправо», «влево», «вверх», «вниз». Ладья сдвигается в указанном направлении на одну клетку, но остается на месте, если сдвигу мешает край доски или перегородка. В любом случае Пете ничего не сообщается. Докажите, что Петя может отдать такую последовательность команд, чтобы в результате ладья оказалась в правом верхнем углу.

б) То же, но ладья ставится в один из двух изветных Пете лабиринтов.

ЕА4. На плоскости как-то расположены несколько бесконечных полос, сумма их ширины равна 100. Полосы разрешено передвигать параллельно себе, но нельзя поворачивать. Докажите, что ими можно покрыть круг радиуса 1.