Инвариант Дена

Определение 1. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многоугольных частей, из которых можно составить другой.

Ясно, что равносоставленные многоугольники равновелики. Но, оказывается, верно и обратное:

Теорема (Бойяи-Гервин) Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Зад 1. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам и дугам окружностей и составить из них а) квадрат б) другую выпуклую фигуру?

Определение 2. Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многогранных частей, из которых можно составить другой.

Зад 2. Докажите, что равносоставлены любые два прямоугольных параллелепипеда

а) равного объема и равной высоты

б) равного объема.

Зад 3. Докажите, что любая прямая призма равносоставлена с кубом.

Зад 4. Докажите, что можно перекроить куб в два равных меньших кубика, разрезав его не более, чем на 100 частей.

3-я проблема Гильберта: верно ли, что любые два многогранника равного объема равносоставлены?

Определение 3. Пусть у многогранника n ребер. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ – длины этих ребер, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника называется набор пар $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_n, \varphi_n)$, рассматриваемый с точностью до подобия.

Определение 4. С набором можно проводить в ту или обратную сторону следующие преобразования:

1. пара (l, φ) заменяется двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l'+l''=l$;
2. пара (l, φ) заменяется двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi'+\varphi''=\varphi$;
3. выкидывается пара вида $(0, \varphi)$ или $(l, k\pi)$, где k – целое.

Наборы *подобны*, если они получаются друг из друга одним или несколькими из таких преобразований.

Упр 5. Найдите простейшие наборы, подобные наборам куба и правильного тетраэдра.

Теорема 6. Если два многогранника равносоставлены, то их инварианты Дена подобны.

Теорема 7. Инварианты Дена куба и правильного тетраэдра не подобны.

Теорема 8 (Ден). Куб и правильный тетраэдр не равносоставлены.

Для доказательства теоремы 7 потребуются следующие леммы, теоремы и утверждения:

Лемма 9. Если число φ соизмеримо с π, то при любом l пару (l, φ) можно выкинуть из набора.

Теорема 10. Если φ соизмеримо с π и $\cos\varphi$ – рационален, то $\cos\varphi = 0, \pm 1$ или $\pm\frac{1}{2}$.

Лемма 11. Есть числовая функция на множестве наборов, которая принимает равные значения на подобных наборах, и различные – на наборах тетраэдра и куба.

Для самостоятельного решения

ИД1. Докажите, что у любой а) прямой б) косой призмы набор Дена подобен пустому набору.

ИД2.Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых тангенс рационален.

ИД3. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых а) косинус б) тангенс имеет вид $r_1 \sqrt{r_2}$, где r_1 и r_2 – рациональные числа.

ИД4 (обратная теорема) Если у двух многогранников одинаковы объемы и инварианты Дена, то они равносоставлены.