

Алгебраические числа

Определение 1. *Алгебраическое число* – это действительное или комплексное число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами; остальные числа называются *трансцендентными*.

Задача 1. Множество алгебраических чисел – счетно.

Теорема 2 (Кантор). Трансцендентные числа существуют, и их большинство!

Факт. Числа e и π – трансцендентны!

Определение 2. *Конструктивное число* – это действительное или комплексное число, для которого существует конечное описание, как вычислить его с любой точностью. Остальные числа называются *неконструктивными*.

Задача 3. Множество конструктивных чисел – счетно.

Теорема 4. Неконструктивные числа существуют, и их большинство!

Задача 5. Пусть x – алгебраическое число, q – рациональное, $x \neq 0$. Доказать, что следующие числа – алгебраические:

а) $-x$, б) $x + q$, в) $\frac{1}{x}$, г) qx , д) $\sqrt[n]{x}$, е) x^2 .

Определение 3. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым*, если $\forall N, n > 0$ найдется рациональное число $\frac{p}{q}$

такое, что $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Nq^n}$.

Задача 6. $\lambda = 0,110001000...010...$ – бесконечная десятичная дробь, где цифры 1 стоят на местах $1!, 2!, 3!, ..., n!, ...$ после запятой, а остальные – нули. Докажите, что число λ хорошо приближаемо.

Задача 7. Пусть $R(x)$ – многочлен n -й степени с целыми коэффициентами, p/q – рациональное число, $R(p/q) \neq 0$, $R(\alpha) = 0$.
Докажите, что

- а) Есть такой многочлен $T(x)$, что $R(x) = (x - \alpha)T(x)$.
- б) Для любой окрестности α найдется такое N , что для всех x из этой окрестности $|R(x)| < N|x - \alpha|$
- в) $|R(p/q)| \geq 1/q^n$

Задача 8. Пусть α – иррациональный корень многочлена n -й степени с целыми коэффициентами. Тогда есть такое N , что для любого рационального p/q выполнено неравенство $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Nq^n}$.

Теорема 9 (Лиувилль). Хорошо приближаемое число не может быть алгебраическим.

Следствие 10. Число λ из задачи 6 трансцендентно.