Функция Эйлера и показатели

Опр1: Функция Эйлера: $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним.

Теорема Эйлера: Если a взаимно просто с n, то $a^{\varphi(n)}-1$ кратно n.

Доказательство: Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_{\varphi(n)}$ – все натуральные числа, не превосходящие n и взаимно простые с ним.

1. Покажите, что aa_1 , ..., $aa_{\varphi(n)}$ дают различные остатки при делении на n, взаимно простые с n.
2. Покажите, что $a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)}\, a^{\varphi(n)} - a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)}$ делится на n.
3. Выведите теорему Эйлера
4. Выведите Малую Теорему Ферма : $\left(m^{p-1}-1\right) \vdots p$ для простого p и натурального m, не делящегося на p.

Теперь настало время изучить функцию Эйлера подробнее

5. Найдите $\varphi(p^s)$ для простого p и натурального s.

Вопрос: как найти общую формулу для $\varphi(n)$?

Идея: показать, что функция Эйлера обладает некоторыми особыми хорошими свойствами

Опр2. Функция f: $N \to Z$ называется мультипликативной, если $f(1) = 1$ и $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых взаимно простых чисел a и b (N – натуральные числа, Z – целые числа).

6. Докажите, что если $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ — разложение m на простые множители, то $f(m) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \dots f(p_n^{k_n})$ для любой мультипликативной функции f.
7. Докажите, что $\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, в предположении, что функция Эйлера – мультипликативная.

Примеры мультипликативных функций

а). $\varphi(n)$ = Функция Эйлера.

б). $f(n) = n^k$ для некоторого фиксированного натурального k.

в). $\tau(n)$ = количество натуральных делителей n.

г). $\sigma(n)$ = сумма всех натуральных делителей числа n.

8. Докажите мультипликативность функции Эйлера
9. Докажите мультипликативность функций из примеров б)-г).
10. Выведите формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ через разложение n на простые множители.

Определение: Показателем целого a по модулю натурального n (при условии, что a и n взаимно просты) называется такое наименьшее натуральное t, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

11. Покажите, что показатель по данному модулю у взаимно простого с ним числа существует.
12. Найдите показатели:

а) 2 по модулю 7;

б) 5 по модулю 9;

в) 2 по модулю 2^k+1.

13. **а)** Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда d делится на t.
б) Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d-s$ делится на t.
в) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.
14. Найдите показатель числа 5 по модулю 91.
15. Пусть N — произведение первых ста простых чисел. Сравнимо ли 2^N с единицей по модулю 17?
16. Найдите наименьшее натуральное число, записанное одинаковыми цифрами и кратное 561.
17. **а)** Докажите, что если p и q простые и $2^q - 1$ делится на p, то q – показатель двойки

по модулю p, а p дает остаток 1 при делении на q.

б) Докажите, что любой делитель числа 2^q-1 (q простое) даёт остаток 1 по модулю q.

18. Докажите, что если m – степень двойки, то любой простой делитель $2^m + 1$ сравним с 1 по модулю $2m$.

Для самостоятельного решения

Пок1. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n для $n > 1$.

Пок2. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n для натуральных a и n.

Пок3. Пусть p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

Пок4. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $3^p-np = n+p$.

Пок5. а) $a >1$, $p >2$, p – простое. Докажите, что простые нечетные делители числа a^p-1 делят $a-1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

б) Докажите, что число $\dfrac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a-1$.

в) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, сравнимых с 1 по модулю $2p$.

г) Докажите, что для взаимно простых a и b есть бесконечно много простых чисел вида $an + b$ (где n натуральное).