Единственность разложения многочленов

Опр1. Дано множество комплексных чисел K, замкнутое относительно сложения, вычитания и умножения. *Простым* в K назовем число, не раскладывающееся в произведение двух меньших по модулю чисел из K.

Упр1. Пусть $K-$ все четные числа.
а) Докажите, что любое число в K можно разложить в произведение простых.
б) Единственно ли такое разложение?

Упр2. Пусть $K-$ все числа вида $m+n\sqrt{5}i$, где $m,n\in\mathbb{Z}$.
а) Докажите, что любое число в K можно разложить в произведение простых.
б) Единственно ли такое разложение?

Разложение многочленов над полем

Опр2. Дано числовое поле F. Многочлен из $F[x]$ назовем *приводимым*, если его можно представить как произведение двух многочленов из $F[x]$ меньшей степени, и *неприводимым* в противном случае.

Упр3. Какова наименьшая степень многочлена из $\mathbb{Q}[x]$, который раскладывается на разное количество неприводимых множителей в $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$?

Упр4. (*повторение*) Докажите, что любой многочлен можно единственным образом разложить в произведение неприводимых
а) в $\mathbb{C}[x]$;
б) в $\mathbb{R}[x]$.

Опр3. *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух многочленов, один из которых ненулевой, называют их общий делитель наибольшей степени.

Упр5. Как найти НОД с помощью алгоритма Евклида?

Лемма6. (*о линейном представлении НОД*).
а) Если $f,g\in F[x]$, то найдутся такие $u,v\in F[x]$, что $uf+vg=\text{НОД}(f,g)$.
б) Можно подобрать u,v так, чтобы было $\deg u<\deg g, \deg v<\deg f$.

Зад7. Найдите НОД и линейно представьте его с ограничением на степень коэффициентов для следующих пар многочленов:
а) $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$;
б) $3x^3-2x^2+x+2$ и x^2-x+1;
в) x^m-1 и x^n-1;
г) x^m+1 и x^n+1.

Лемма8. Если в $F[x]$ произведение fg делится на неприводимый многочлен p, то f или g делится на p.

Теорема9. (*Основная теорема арифметики*). Всякий многочлен в $F[x]$ может быть разложен в произведение числа и неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1, причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Разложение многочленов над $\mathbb{Z}$

Упр10. Известно, что $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ и все коэффициенты произведения fg делятся на простое число p. Докажите, что на p делятся все коэффициенты f или все коэффициенты g.

Опр4. *Содержание* многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]-$ это НОД всех его коэффициентов.

Лемма11 (Гаусс). Произведение многочленов с содержанием 1 является многочленом с содержанием 1.

Зад12. Докажите, что
а) всякий многочлен $S \in \mathbb{Q}[x]$ можно представить в виде $S = qP$,
где $q \in \mathbb{Q}, P \in \mathbb{Z}[x]$ и содержание P равно 1.
б) Такое представление единственно.

Теорема13. Если $P \in \mathbb{Z}[x]$ приводим в $\mathbb{Q}[x]$, то он приводим и в $\mathbb{Z}[x]$.

Теорема14. (*Гаусс*) В $\mathbb{Z}[x]$ разложение на неприводимые множители однозначно.

На дом

EP1. При делении многочлена $x^{1951} - 1$ на многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ получается частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

EP2. $f(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg f = 3$. Докажите, что f неприводим тогда и только тогда, когда у него нет рациональных корней.

EP3*. Докажите основную теорему арифметики для многочленов $F[x, y]$ от двух переменных.

Указание. Представьте $F[x, y]$ как $K[x]$, где $K = F[y]$ и используйте понятие содержания многочлена с $F[y]$ вместо $\mathbb{Z}$.

Барнаул 2015, 19 января. 10 класс, А.Шаповалов
www.ashap.info/Uroki/Altaj/index.html