Теорема Виета и симметрические многочлены

Зад 1. $a+\dfrac{1}{a}$ – целое число. Докажите, что числа a^3+1/a^3 *и* $a^{10}+1/a^{10}$ – тоже целые.

Зад 2. Докажите, что если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

Зад 3. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2+6x+10=0$.

Зад 4. Выразите x^6+y^6 через $x+y$ и xy.

Зад 5. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$, **б)** $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

Зад 6. Решите иррациональное уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Зад 7. Разложите на множители многочлен $6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$.

Зад 8. Решите уравнение $x^4–5x^3+8x^2–5x+1=0$.

Зад 9. Найдите первые 10 цифр после запятой в числе

а) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{100}$ **б)** $\left(2+\sqrt{3}\right)^{100}$ **в)** $\left(3+\sqrt{5}\right)^{100}$.

Опр 1. Назовем многочлен $f(z)=a_0z^n+\ldots+a_{n-1}z+a_n$, $(a_0\neq 0)$ *возвратным*, если в нем коэффициенты, равноудаленные от концов совпадают.

Зад 10. Докажите, что всякий возвратный многочлен четной степени $2k$ представляется в виде $f(z)=z^k h\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, где h – некоторый многочлен степени k.

Зад 11. Дан график кубической параболы и две прямые, параллельные оси абсцисс, пересекающие график в трех точках каждая. Пусть абсциссы этих точек $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6$. Докажите, что $x_2-x_1+x_6-x_5=x_4-x_3$.

Для самостоятельного решения

Ви1. Докажите, что число $(7+\sqrt{48})^{13}+(7-\sqrt{48})^{13}$ целое и делится на 14.

Ви2. Разложите на множители: $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Ви3. Выразите явно x^n+y^n через $x+y$ и xy.

Ви4*. Существует ли многочлен $P\in R[x,y]$ такой, что он принимает все положительные значения и не принимает нулевого.

Барнаул 2015, 5 февраля. 10 класс, А.Шаповалов www.ashap.info/Uroki/Altaj/index.html