

Посредники в неравенствах

0. Точка X лежит по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку АВ, что и точка А. Докажите, что $AX < BX$.

Идея. Чтобы доказать неравенство $A < B$ можно выбрать *посредник P* и доказать, например, $A < P$ и $P \leq B$. Искусство состоит в выборе P. В зад.0 посредником была длина ломаной.

1. Докажите, что а) $1000001^5 > 99999^6$; б) $\sqrt[3]{1001} > \sqrt[4]{9999}$.

2. В клетках таблицы 10×10 стоят 100 различных чисел. Макс выбрал в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрал наименьшее. Минька выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

При сравнении сумм/произведений посредники можно выбирать для каждого слагаемого/сомножителя. Слагаемое посредник может быть получено *огрублением*, то есть заменой в нужную сторону на то, что легко считать.

3. Докажите, что $100 < 1 + 3/2 + 4/3 + 5/4 + \dots + 101/100 < 134$.

4. Докажите, что

а) $3/4 \cdot 5/6 \cdot 7/8 \cdot \dots \cdot 98/99 \geq 1/33$ (в знаменателях – составные числа по порядку);

б) $1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 \cdot 6/7 \cdot \dots \cdot (p-1)/p \geq 1/n$ (в знаменателях – $(n-1)$ первых простых чисел).

5. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:

$$11\dots 73 \times 12\dots 65 = 123\dots 45.$$

Могло ли исходное равенство быть верным?

Малый мехмат, 8 класс, гр.1329а, 5 июля 2019 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Bolgar2/2019/8-1329a/index.html>