Графи – 1. Цикли и вериги

Когато има обекти и са ни интересни връзките между двойките обекти, това може да се изобрази чрез фигура, наречена граф (обектите са точките, а ребрата – линиите между точките)

1. Във Фейсбук има 9 момчета от един и същ клас. Известно е, че Петър е приятел на Иван и Роман, Асен е приятел на Иван и Симеон, Борис – на Веселин и Калоян, а също така приятели се оказали и Михаил с Калоян, Иван със Симеон, Михаил с Веселин и Симеон с Роман. Повече приятелства между тези момчета във Фейсбук нямало.Може ли Петър да пусне новина така, че преминавайки от приятел към приятел (между приятели), тази новина да стигне до Калоян?
2. В три от върховете на правилен петоъгълник разположили по една пешка. Разрешено е пешките да се придвижват по диагонал до свободно място. Може ли по този начин една от пешките да се върне на първоначалното си място, а другите две да сменят местата си?
3. В горните ъгли на дъска 3×3 стоят черни шахматни коне, а в долните ъгли – бели. Как могат да се разместят конете, че да се получи противоположната картина – в горните ъгли да са белите коне, а в долните – черните? Колко хода са нужни за това?
4. Може ли върху окръжност да се разположат числата 0, 1, 2, …, 9 така, че всеки две съседни числа да се различават с 3, 4 или 5?
5. В равнината отбелязали 15 точки. Може ли да ги съединим с непресичащи се линии така, че всеки две точки да бъдат съединени точно с една линия?

Разбиване на цикли и вериги

Определение. В граф има *върхове* и някои от тях са съединени с *ребра*. Ако два върха са съединени, то това е само с едно ребро. ***Степен*** на даден връх ще наричаме броя на излизащите от него ребра.
Факт 1. Ако в ***краен*** граф всички върхове имат степен 2, то този граф може да бъде разбит на цикли така, че всеки два различни цикъла да нямат нито общи върхове, нито общи ребра.
Факт 2. Ако в краен граф степените на всички върхове са не по-големи от 2, то той може да бъде разбит на непресичащи се цикли и вериги.

6. 20 ученици решили 20 задачи. Известно е, че всеки е решил по две задачи и всяка задача е била решена от двама ученици. Докажете, че може да бъде помолен всеки ученик да разкаже една от решените от него задачи и така всички задачи да бъдат разказани.
7. а) В един клас има 30 ученици и всеки от тях има точно по двама приятели. Докажете, че могат да се организират не по-малко от 10 дежурства така, че да дежурят по двама приятели и никой да не е дежурил по два пъти.
б) Винаги ли могат да се организират 11 дежурства?
8. След няколко игрови дни на един футболен шампионат, в който всеки два отбора играят по веднъж се оказало, че всеки пет отбора могат така да се разположат в кръг, че всеки от тях да е играл с отборите, стоящи от двете му страни. Докажете, че шампионатът може да завърши за три кръга (в един ден всеки отбор може да изиграе най-много една среща).
9. От дъска 4×4 са изрязани всички ъглови клетки. Може ли шахматен кон да обходи цялата дъска и да се върне в изходната клетка, пребивавайки във всяка клетка точно по веднъж?