

Да забележим двуделния граф

Оцветяване в два цвята

1. а) Може ли да се оцветят върховете на 20-ъгълник в два цвята така, че краищата на всяка страна да са с различен цвят?

б) А върховете на 19-ъгълника?

2. а) В някои от клетките на шахматна дъска са поставени коне. Докажете, че можем да ги оцветим в два цвята така, че конете от един и същ цвят да не **се бият** един друг.

б) В някои *бели* клетки на шахматна дъска са поставени царе. Докажете, че можем да ги оцветим в два цвята така, че царете от един и същ цвят да не се бият един друг.

Определение. Един граф наричаме **двуделен**, ако можем да оцветим неговите върхове в два цвята така, че краищата на всяко ребро да бъдат с различен цвят.

Примери за двуделни графи:

а) четен цикъл;

б) граф „Кон на шахматна дъска“;

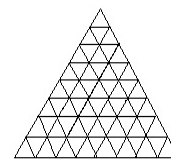
в) граф „Хромов топ на шахматна дъска“ (движи се като обикновен топ, но може да преминава само в съседна по страна клетка).

4. а) Нарисувайте двуделен граф с 4 върха и възможно най-много ребра. Колко са ребрата? Какви са степените на върховете?

б) Нарисувайте двуделен граф с 6 върха и възможно най-много ребра. Колко са ребрата? Колко най-малко са **самопресичанията** на чертежа?

5. а) Двуделен ли е графът на куба?

б) Един голям триъгълник е разрязан на еднакви малки триъгълници (вижте чертежа вдясно). Всяко малко триъгълниче ще считаме за връх, а ако две малки триъгълничета имат обща гранична отсечка, ще считаме, че тези два върха (триъгълничетата) са свързани с ребро. Двуделен ли е полученият граф?



6. а) Шахматен кон е направил 7 хода. Може ли той да се върне с последния си ход в полето, от което е тръгнал?

б) Може ли в някакъв двуделен граф да намерим цикъл със 7 ребра?

7. Дадено е кубче на Рубик $3 \times 3 \times 3$.

а) Клетките (квадратчетата) на повърхността на кубчето ще считаме за върхове на граф, а ако две клетки имат обща страна, ще считаме, че те са свързани с ребро. Двуделен ли е полученият граф? Колко върхове и колко ребрата?

б) Върховете на клетките на повърхността на кубчето ще считаме за върхове на граф, а страните на клетките ще считаме за ребра на графа. Двуделен ли е полученият граф? Колко са върховете в него и колко ребрата?

8. а) Квадрат е разделен на по-малки квадрати, не задължително еднакви. Малките квадрати ще считаме за върхове на граф, а всеки два от тях, които имат обща гранична отсечка, ще считаме, че са свързани с ребро в графа. Може ли да се получи не двуделен граф?

б) Равностранен триъгълник е разделен на по-малки триъгълници, не задължително еднакви. Малките триъгълници ще считаме за върхове на граф, а всеки два от тях, които имат обща гранична отсечка, ще считаме, че са свързани с ребро в графа. Може ли да се получи не двуделен граф?