

Графи: преброяване на ребрата и свързаност

1. Шоколад, съставен от единични квадратчета с размер 5×20 за един ход може да се счупи по границите на клетките на две по-малки правоъгълни парчета. На следващия ход е разрешено да изберем коя да е правоъгълна част и по същия начин да я разделим на две правоъгълни части и т.н. При това в нито един момент не мога да получаваме квадратни парчета. Какъв е максималният брой ходове, които могат да бъдат направени?

2. Петър направил пъзел от единични квадратни листчета във формата на дъска 7×7 . Харесал пъзела и решил да го залепи и закачи на стената. За 1 минута той залепя две парчета в едно – началните или по-рано залепени. За колко минути той може да залепи целия пъзел?

Степени и свързаност

Определение. Един граф се нарича *свързан*, ако от кой да е негов връх може да се стигне по ребрата до всички други върхове.

3. Свързан граф ли е „Конят“

а) на дъска 3×3 ;

б) на дъска 4×4 ?

Определение Всеки граф се разпада на свързани парчета, които се наричат *компоненти на свързаност* (свързаният граф се състои от една компонента).

4. Колко най-малко компоненти на свързаност може да има в граф със 7 върха? А най-много?

5. а) В кръг растат 12 водни лилии. Жаба може да скача през 3 празни водни лилии върху 4-тата. Ще считаме водните лилии за върхове на граф, а скоковете – за ребра на този граф. Колко са компонентите на свързаност в този граф?

б) А ако водните лилии са 9?

в) А ако водните лилии са 10?

6. В един граф изтрили едно ребро. Как може да се промени броят на компонентите на свързаност?

7. (Теорема) Нека е даден граф с N върха.

а) Ако графът е свързан, то в него има не по-малко от $N-1$ ребра.

б) Ако в графа има K компоненти на свързаност, то в него има не по-малко от $N-K$ ребра.

8. От конструкцията на куб прерязали 8 ръба. Докажете, че конструкцията ще се разпадне на части.

9. От кибритени клечки е направен голям квадрат, състоящ се от 64 квадратни клетки със страна 1 клечка.

а) В лявата долна клетка стои бръмбар, който не може да пълзи през клечките. Колко най-малко клечки трябва да се премахнат, за да може бръмбарът да достигне (допълзи) до която си иска клетка?

б) Във всяка ъглова клетка стои по един бръмбар. Колко най-малко клечки трябва да се премахнат, за да може до всяка клетка да допълзи поне един бръмбар?

в) Колко най-малко клечки трябва да се премахнат така, че дъската да се разпадне на 8 еднакви многоъгълника?

г) Колко най-малко клечки трябва да се премахнат така, че дъската да се разпадне на 4 еднакви многоъгълника?

10*. В свързан граф всички върхове има степен 1 или 2. Какъв е най-малък брой върхове със степен 1?

11*. Даден е правоъгълник 7×10 , съставен от единични квадрати. Всяка негова клетка разрязали по един от диагоналите. На какъв най-малък брой части може да се разпадне правоъгълникът?