

## Графы: подсчет ребер и связность

1. Клетчатую плитку шоколада  $5 \times 20$  разрешается за один ход разломить по границам клеток на два меньших прямоугольных куска. Следующим ходом разрешается выбрать любой кусок и так же разломить его на два, и т.д. При этом ни в какой момент не должно возникать квадратных кусков. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?
2. Петя сложил из единичных квадратиков пазл в виде доски  $7 \times 7$ . Пазл Пете понравился, и он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска — начальных, или ранее склеенных. За сколько минут он склеит всю картину?

### Степени и связность

**Определение** Граф *связный*, если от любой его вершины можно пройти по ребрам до всех других вершин.

3. Связан ли граф коня **а)** на доске  $3 \times 3$ ; **б)** на доске  $4 \times 4$ ?

**Определение** Всякий граф распадается на связные куски, называемые *компонентами связности* (связный граф состоит из одной компоненты).

4. Какое наименьшее число компонент связности может быть в графе с 7 вершинами? А наибольшее?
5. **а)** По кругу растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на 4-ю. Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?  
**б)** А если кувшинок 9?  
**в)** А если кувшинок 10?
6. В графе стерли одно ребро. Как может измениться число компонент связности?
7. **Теорема.** Дан граф с  $N$  вершинами.  
**а)** Если граф связан, то в нем не менее  $N-1$  ребер.  
**б)** Если в графе  $K$  компонент связности, то в нем не менее  $N-K$  ребер.
8. В каркасе куба перерезали 8 ребер. Докажите, что каркас развалится на части.
9. Из спичек сложен квадрат, разбитый на 64 квадратные клетки со стороной в одну спичку.  
**а)** В левой нижней клетке сидит жук, который не может переползти через спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог доползти до любой ячейки?  
**б)** В каждой угловой клетке сидит по жуку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы до каждой клетки мог доползти хотя бы один из жуков?  
**в)** Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 8 равных многоугольников?  
**г)** Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 4 равных многоугольника?
- 10\*. В связанном графе все вершины имеют степень 1 или 2. Каково наименьшее число вершин степени 1?
- 11\*. В клетчатом прямоугольнике  $7 \times 10$  провели по одной диагонали в каждой клетке и сделали разрез по этим диагоналям. На какое наименьшее число частей мог развалиться прямоугольник?