

Графы: деревья

Определение. *Цикл* это путь в графе, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине; все рёбра и вершины цикла различны. В цикле не менее 3 рёбер.

Пример. Граф каждого многоугольника – цикл.

1. Какой наибольший цикл есть:

а) в графе коня на доске 3×3 ;

б) в графе ладьи на доске 4×4 ?

2. а) В круг растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгнуть через 3 пустые кувшинки на 4-ю (в частности, с 1-й на 5-ю, со 2-й на 6-ю и т.п.). Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – рёбрами этого графа. Сколько различных циклов в этом графе?

б) А если кувшинок 9?

в) А если кувшинок 10?

Определение. *Дерево* – Это связный граф без циклов.

4. а) Нарисуйте все возможные различные деревья с 4 вершинами.

б) Нарисуйте несколько различных деревьев с 7 вершинами. Почему число рёбер во всех деревьях одно и то же?

Теорема (критерий деревьев).

а) В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

б) Если в связном графе с n вершинами ровно $n-1$ ребро, то это – дерево.

5. Сколько рёбер надо стереть в графе куба, чтобы получить дерево?

Теорема. В каждом связном графе можно стереть несколько рёбер и получить дерево.

Определение. *Лист* – это вершина степени 1 в дереве.

6. В дереве все вершины степени 1 или 2. Сколько в нём листов?

7. Из спичек сложен большой квадрат, разбитый на 64 единичных квадрата со стороной в 1 спичку.

а) Какое наименьшее число спичек надо убрать так, чтобы доска распалась на 8 равных многоугольников?

б*) Какое наименьшее число спичек надо убрать так, чтобы доска распалась на 4 равных многоугольника?

8*. В дереве 10 вершин степени 3, а все остальные вершины – листы. Сколько рёбер в этом графе?

9*. Дан квадрат 7×7 , разбитый на единичные квадраты. Каждая клетка покрашена в один из 12 цветов, все цвета са использованы. Пара цветов называется *хорошей* если найдутся две соседние клетки (с общей стороной), покрашенные в эти два цвета.

Каково наименьшее возможное число хороших пар цветов?