

## Графи: дървета

**Определение.** *Цикъл* е път в граф, който завършва в началния връх; всички ребра и върхове в един цикъл са различни. Цикълът има поне 3 ребра.

**Пример.** Граф върху всеки многоъгълник е цикъл.

1. Какъв най-голям цикъл има:

- а) граф на кон на дъска  $3 \times 3$ ;
- б) граф на топ на дъска  $4 \times 4$ ?

2. а) В кръг растат 12 водни лилии. Жаба може да скача през 3 празни водни лилии върху 4-тата (значи от 1-та върху 5-та, от 2-та върху 6-та и т.н.). Ще считаме водните лилии за върхове на граф, а скоковете – за ребра на този граф. Колко са различните цикли в този граф?

- б) А ако водните лилии са 9?
- в) А ако водните лилии са 10?

**Определение .** *Дърво* се нарича свързан граф без цикли.

4. а) Нарисувайте всички възможни различни дърва с 4 върха.

б) Нарисувайте няколко различни дървета със 7 върха. Защо броят на ребрата е еднакъв във всяко от тези дървета?

**Теорема.** Нека е даден граф с  $N$  върха.

- а) Ако графът е дърво, то в него има  $N-1$  ребра.
- б) Ако графът е свързан и има  $N-1$  ребра, то графът е дърво.

5. Колко ребра трябва да се премахнат от графът на куб, за да получи едно дърво?

**Теорема.** От всеки свързан граф може да се премахнат няколко ребра, за да се получи дърво.

**Определение .** *Лист* се нарича връх със степен 1 в дърво .

6. В едно дърво всички върхове са от степен 1 или 2. Колко са листа?

7. От кибритени клечки е направен голям квадрат, състоящ се от 64 единични квадрата със страна 1 клечка.

- а) Колко най-малко клечки трябва да се премахнат така, че дъската да се разпадне на 8 еднакви многоъгълника?
- б\*) Колко най-малко клечки трябва да се премахнат така, че дъската да се разпадне на 4 еднакви многоъгълника?

8\*. В дърво всички върхове са от степен 1 или 3. Има 10 върха от степен 3. Колко ребра има този граф?

9\*. Даден е квадрат  $7 \times 7$ , съставен от единични квадрати. Всяка негова клетка е оцветена в един от 12 цвят, всички цвят са използвани. Двойка от цвят се нарича *добра* ако има две соседни клетки (с общата страна) оцветени в тези двамата цвят. Колко най-малко има различни добри двойки?