

3. Инвариант

Определение. Инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях (например, при разрезании не меняется сумма площадей частей фигуры). Типичные инварианты: четность, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п.

Если разрешенные преобразования инвариант сохраняют, то нельзя получить ситуацию с другим значением инварианта.

Четность, делимость и остатки

1. Можно ли монетами в 14 и 35 крон заплатить без сдачи сумму в 245 крон? А в 2005 крон?
2. Можно ли разменять 55 динаров десятью монетами достоинством в 1, 3, 5 и 7 динаров? А 13-ю монетами?
3. Банкомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету **а)** на 77 монет? **б)** А на 100 монет? **в)** А на 111?
4. Дети гуляют парами с орехами в карманах. В каждой паре у одного орехов вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 орехов?
5. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные.
а) Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
б) Какое наибольшее число кучек может получиться?

Раскраски

При раскрасках следят за количеством, разностью или четностью клеток того или иного цвета. Если раскраски нет, можно раскрасить самому.

6. **а)** Дан клетчатый квадрат 20×20 без одной угловой клетки. Можно ли разрезать его на прямоугольники 2×1 ?
б) Дан клетчатый квадрат 20×20 без двух угловых клеток: левой верхней и правой нижней. Можно ли разрезать его на прямоугольники 2×1 ?
7. **а)** На доске 8×8 можно выделить любой прямоугольник из 4 или 6 клеток и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли доску, раскрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?
б) Тот же вопрос для раскрашенной в шахматном порядке доски 7×7 , где вначале угловые клетки – черные.
- 8* В стране ходят монеты достоинством только в 7, 13 или 25 динаров. Алиса заплатила за пирожок несколькими монетами, и получила на сдачу на две монеты больше, чем заплатила. Какова наименьшая возможная цена пирожка?
- 9* Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать на прямоугольники 1×4 ?
- 10* По кругу лежат 30 монет, чередуясь: 3 орлом, 3 решкой, 3 орлом, 3 решкой и т. д. Монету разрешается перевернуть, если её соседи лежат по-разному. Какое наибольшее число можно положить орлами, повторяя разрешённую операцию?
- 11*. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?