

Двуделен граф

Оцветяване в два цвята

1. На шахматна дъска има няколко коня. Докажете, че можем да ги оцветим в два цвята така, че едноцветните коне да не се бият един друг.
2. Написани са 1000 цели числа. Докажете, че можем да ги оцветим в два цвята така, че отношението между числата от еднаков цвят да не е просто число.
3. Върху координатната равнина са начертани няколко непрепокриващи се равностранни триъгълници. Всеки триъгълник има страна, успоредна на оста Ox . Докажете, че триъгълниците могат да се оцветят в два цвята така, че едноцветните триъгълници да не се допират по отсечка.

Определение. Един граф е *двуделен*, ако можем да оцветим върховете му в два цвята така, че да няма ребро, чиито краища са едноцветни.

Пример: граф таблица: върховете са редовете и стълбовете, които са свързани с ребро, ако на мястото, в което се пресичат няма 0.

При движение по двуделен граф цветовете на върховете се редуват последователно, затова връщането в началото може да стане само след четен брой ходове.

4. В задачи 1-3 определете върховете и ребрата на двуделните графи.

Позиции и ходове

При всяка игра има графът на играта: позициите са върхове, а ходовете са ребра. Полезно е да знаем, когато този граф е двуделен.

5. а) На права стоят два скакалеца. Всяка минута един от скакалците прескача точно един други. Може ли след точно 77 скока всички скакалци да се окажат на своите места?

б) Същото условие, само че за 3 скакалеца.

6. Върху шахматна дъска има две еднакви пешки. За един ход може да преместим една от пешките на съседното поле по вертикала или по хоризонтала. За всяка пешка е отбелязана клетката, симетрична на нея спрямо *средната линия*. Може ли всички пешки да попаднат в отбелязаните клетки точно след 111 хода?

7. Върху шахматна дъска има пет еднакви пешки. За един ход може да преместим една от пешките на съседното поле по вертикала или по хоризонтала. За всяка пешка е отбелязана клетката, симетрична на нея спрямо *центъра на дъската*. Може ли всички пешки да попаднат в отбелязаните клетки точно след 55 хода?

Редуване и обхождане

8. Нека Γ е двуделен граф с черни и бели върхове. Докажете, че:

а) Ако в Γ има затворен цикъл, минаващ през всеки връх точно по един път, то върховете от всеки цвят са по равно.

б) Ако в Γ има път, минаващ през всеки връх точно по един път, то броят на белите върхове се различава от броя на черните върхове с не повече от 1.

9. Замък с триъгълна форма със страна 50 метра е разделен на 100 триъгълни зали със страна 5 метра. На всяка стена между две зали има врата. През какъв най-голям брой зали може да премине турист, ако не влиза в никоя зала по два пъти?

10. За игра на класика са нарисувани 10, номерирани с естествените числа от 1 до 10 клетки, както е показано на чертежа вдясно. Маша, която била извън клетките, скочила първоначално в клетка 1, а после минала и през останалите клетки, като всеки път скокът бил в съседна (по страна) клетка. Накрая била в клетка 10, след което скочила извън клетките. Известно, че Маша е била в клетка 1 веднъж, в клетка 2 – 2 пъти, ..., в клетка 9 – 9 пъти. Колко пъти е била в клетка 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Още задачи

ДГ1. Може ли да разположим естествени числа във върховете на куб така, че във всяка двойка числа, свързани с ребро, едното число да се дели на другото, а във всички останали двойки числа това да не е изпълнено?

ДГ2. На шахматна дъска има две еднакви пешки. За един ход може да преместим една от пешките на съседното поле по хоризонтала или по вертикала. Така премествали пешките, докато не преминали през всички възможни позиции. Докажете, че някоя от позициите се е срещнала не по-малко от два пъти.

ДГ3. 10 ученици от един кръжок образували отбор за решаване на домашни работи. В отбора винаги има не по-малко от 3 човека. Всяка вечер в отбора се добавя един човек или от отбора се изключва един човек. Може ли всички възможни състави на отбори да се случат точно по веднъж?