

Графи-2. Преброяване по два начина

1. На дъска 11×10 (11 реда, 10 стълба) са поставени пешки. Може ли във всички редове да има различен брой пешки, а във всички стълбове – еднакъв?

2. Колко най-много ребра може да има

а) в граф с n върха?

б) в двуделен граф с b бели и c черни върха?

Определение. Степен на връх наричаме броя на излизащите от този връх ребра.

Теорема 3. а) Сумата от степените на върховете на един граф е равна на удвоения брой на ребрата му.

б) В двуделен граф сумата от степените на белите върхове е равна на сумата от степените на черните върхове и е равна на броя на ребрата.

4. **Лема за ръкостисканията.** В краен граф броят на върховете с нечетна степен е четен.

(Това е вярно и за графи с кратни ребра и примки).

5. а) Във всяка клетка на клетъчен правоъгълник $m \times n$ написали броя на неговите съседи (по страна).

Намерете сумата на всички тези числа.

б) Жаклин записва едно след друго числа в клетките на шахматна дъска. Всеки път той записва в съответната клетка броя на запълнените в този момент нейни съседи (по страна). Когато всички клетки са запълнени, той пресмята сумата на записаните числа. Докажете, че сумата не зависи от последователността, в която се запълват клетките и намерете тази сума.

6. Колко най-много ребра може да има в двуделен граф, ако броят на върховете в него е равен на

а) 10; б) 21; в) $2m$; г) $2m + 1$?

7. Върху числова ос са отбелязани точки с координати 1, 2, 3, ..., 21. Намерете броя на отсечките с нечетна дължина, с краища в отбелязаните точки.

8. В ред са написани 11 цели числа. За всяка група от последователно записани числа е пресметната нейната сума (групите от по едно число също се отчитат). Колко най-много суми могат да са нечетни?

Още задачи

ДС1. Десет момчета и десет момичета премериха сили в еднокръгов турнир по тенис. Всички момчета спечелиха еднакъв брой победи. За всяка победа над момче, момиче получавало цвete.

Могат ли всички момичета да имат еднакъв брой цвete в края на турнира? (В тениса няма равенства)

ДС2. Каубоите винаги казват истината на своите познати и лъжат своите непознати. Събрали се 50 каубоя и всеки казал на всекиго от присъстващите една от двете фрази: „Аз имам четен брой познати в тази компания” или „Аз имам нечетен брой познати в тази компания”.

а) Може ли да се окаже, че първата фраза е произнесена точно 2015 пъти?

б) Колко най-много пъти може да бъде произнесена първата фраза?

ДС3*. На шахматна дъска един след друг се поставят царе – първият – в произволна клетка, а всеки следващ трябва да може да бие нечетен брой по-рано поставени царе. Може ли да се запълнят всички клетки на дъската?

ДС4*. Кошниците съдържаха плодове с различно тегло. След това всички тези плодове бяха прехвърлени в кутии. Всеки плод се оказа в кутия, където общото тегло на плода е по-голямо от това в кошницата, където беше. Докажете, че има повече кошници, отколкото кутии.