Конечное и бесконечное

Капля камень точит

Принцип Архимеда. *Складывая само с собой любое положительное число (даже очень малое), можно превзойти любое число (даже очень большое).*

Задача 1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две разноцветные точки на расстоянии 1 микрон.

Задача 2. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на один из них. Докажите, что луч света отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).

Задача 3. Докажите, что среди сумм вида $1+1/2 + 1/3 +\ldots+ 1/n$ есть сколь угодно большие.

Сколько бы ни было – хочется еще

Следует различать «сколь угодно большое» и «бесконечное».

Задача 4. а) Докажите, что есть сколь угодно длинная группа подряд идущих составных чисел.
б) Найдется ли бесконечная группа подряд идущих составных чисел?

Задача 5.а) Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали. Может ли он обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?
б) Тот же вопрос, если доску продлили вправо и влево до бесконечности?

Дирихле на бесконечности

Если бесконечную кучу разделить на конечное число частей, хотя бы одна из частей должна быть бесконечной.

Упр.6. Докажите, что есть бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 2010 одинаковый остаток.

Задача 7. Докажите, что среди цифр в десятичной записи $\sqrt{2}$ есть две цифры, каждая из которых встречается бесконечно много раз.

Задача 8. Круг разделен на 2010 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано k), фишка сдвигается на k секторов по часовой стрелке, и там, куда она придет, число увеличивается на 1. Докажите, что со временем все числа станут больше миллиона.

Ковшом моря не вычерпаешь

Если покрыто целое, то покрыта его любая часть

Задача 9. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?

Задача 10. На плоскости отметили миллион точек, и через каждые две провели прямую. Докажите, что можно провести еще одну прямую так, чтобы угол между ней и любой ранее проведенной выражался нецелым числом градусов.

Задача 11. Полоса – это часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?

Домашнее задание

КБ1. а) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
б) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдётся кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.

КБ2. Бесконечная во все стороны шахматная доска покрыта домино так, что каждое домино покрывает клетки. Может ли случиться, что каждая прямая, идущая по границам клеток режет пополам
а) лишь конечное число домино
б) бесконечное число домино?

КБ3. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?

КБ4. Верно ли, что среди сумм вида $1+1/2^2 + 1/3^2 +\ldots+ 1/n^2$ есть сколь угодно большие?

КБ5. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

КБ6. Докажите, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

КБ7. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку А. Доказать, что точка, лежащая с А по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая А, неограничена.

КБ8. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит по действительному числу. За один ход разрешается сменить знак у чисел в любой пятерке клеток, чьи центры лежат на одной окружности. Докажите, что можно добиться, чтобы в каждой такой пятёрке сумма стала неотрицательной.

КБ9. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен и имеет конечное число детей. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

КБ10. В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжков блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.