

ДВУМЯ СПОСОБАМИ

Зрение двумя глазами стереоскопично. Взгляд с двух точек иногда выявляет противоречие, в других случаях выявляет соотношение, дающее решение.

1. а) Можно ли расставить числа в таблице 6×9 так, чтобы в каждом столбце была сумма по 10, а в каждой строке – по 20?

Решение: нет, т. к. сумму всех чисел таблицы можно посчитать двумя способами: по строкам (получаем $6 \times 20 = 120$) и по столбцам (получаем $9 \times 10 = 90$).

- б) В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце – по 10, а в каждой строке – по 20. Сколько в таблице строк?

Решение: 4. Сумма всех чисел таблицы по столбцам равна $8 \times 10 = 80$, значит, строк там $80/20 = 4$.

2. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся – 21 год. Сколько лет получившему травму?

Решение: Суммарный возраст игроков до ухода равен $11 \times 22 = 242$, а после – $21 \times 10 = 210$. Значит, возраст ушедшего – $242 - 210 = 32$ года

3. В строку записаны n чисел, причем суммы любых трех подряд равна 7, а сумма всех равна 20. а) Может ли n равняться 12? б) Может ли n равняться 10? Найдите седьмое число.

Решение: а) Если $n = 12$, то числа можно разбить на 4 группы по 3 подряд идущих, значит, сумма всех чисел равна $7 \times 4 = 28$, а не 20.

б) Первое, второе и третье числа образуют тройку, и их сумма равна 7. Аналогично – числа с номерами 4, 5, 6 и 8, 9, 10. Значит, сумма всех чисел, кроме седьмого, равна $7 \times 3 = 21$, следовательно, седьмое равно $20 - 21 = -1$. Пример такой строки: $-1, 4, 4, -1, 4, 4, -1, 4, 4, -1$.

4. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

Решение: Ничья взаимна (если A сыграл вничью с B , то B сыграл вничью с A). Если попросить игроков обмениваться рукопожатием после ничьей, получим противоречие по лемме о рукопожатиях. Другой способ (по теме) – пусть за ничью каждый получает по очку. Тогда суммируя эти очки по играм, получим четное число, а по игрокам – нечетное. Противоречие.

5. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше, чем каждая из остальных, а Лена – 5 песен – меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

Решение: Пусть за каждую песню каждая девочка получит по фантику. Суммируя общее число фантиков по песням видим, что это число делится на 3 (каждая песня исполнялась 3 раза). Кроме того, Маша и Нина получили не более 7 и не менее 6 фантиков каждая. Значит, всего было роздано не более, чем $8 + 7 + 7 + 5 = 27$ и не менее, чем $8 + 6 + 6 + 5 = 25$ фантиков. Единственное число от 25 до 27, кратное 3 – это 27, поэтому спето $27:3 = 9$ песен.

6. Иван с сыном и Степан с сыном были на рыбалке. Иван и его сын поймали рыб поровну, а Степан – втрое больше своего сына. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Иван?

*Это особо трудная задача, поскольку здесь **три** случая, из них два неочевидных. Два из случаев дают противоречие, и только третий – решение.*

Решение: Если это 4 разных человека, то сумма количества рыб у Степана и сына делится на 2, и сумма рыб у Ивана с сыном – тоже. Значит, общее число рыб должно делиться на 2, а это не так. Если Иван – отец Степана, то Иван поймал столько же

рыб, сколько Степан, то есть в 3 раза больше, чем сын Степана. Тогда все вместе поймали в 7 раз больше рыб, чем сын Степана. Но 25 не делится на 7. Остается случай, когда Степан – отец Ивана. Тогда Степан поймал в 3 раза больше рыб, чем Иван и чем его сын, значит все вместе поймали в 5 раз больше рыб, чем Иван, то есть у Ивана 5 рыб.

Для самостоятельного решения

7. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8. Длина стороны AB – 0,6. Найти длину стороны BC , если известно, что она выражается целым числом.
Решение: Применяя дважды неравенство треугольника, видим, что AC находится между $3,8-0,6$ и $3,8+0,6$, то есть между 3,2 и 4,4. Значит, $AC=4$.
8. Две команды разыграли первенство отряда по десятиборью, причем за победу в каждом из видов команда получала 4 очка, за ничью – 2 очка и за проигрыш – 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?
Решение: В случае ничьей обе команды в сумме получают 4 очка, а иначе – 5 очков. Если бы произошло 10 ничьих, то всего команды набрали бы $4 \times 10 = 40$ очков. Каждая результативная игра добавляет к этой сумме по одному очку. Значит, было $46 - 40 = 6$ результативных игр и 4 ничьи.
9. У царя Гороха I было три сына. Каждый из его потомков либо умер во младенчестве, либо правил государством и также имел трех сыновей. Известно, что последним правителем был Горох XVII. Сколько потомков царя Гороха умерло во младенчестве?
Решение: Каждый правящий потомок приносит по 3 сына в общее число потомков. Правящих Горохов было 17, значит у них всего 51 сын. Добавим сюда одного Гороха I, который не был сыном ни одного из правящих Горохов. Получаем, что в династии было 52 человека, из них 17 царствовали, и $52 - 17 = 35$ умерли во младенчестве.
10. В классе, где я учился, каждый мальчик дружил с тремя девочками, а каждая девочка – с двумя мальчиками. При этом в классе был 31 пионер и стояло 19 парт. Сколько учеников было в моем классе?
Решение: Всего дружб было в 3 раза больше, чем мальчиков – с одной стороны, и в 2 раза больше, чем девочек – с другой стороны. Значит, девочек было в полтора раза больше, чем мальчиков, то есть девочек – 3 части и мальчиков – 2 части. Часть – число целое, поскольку равна разности между числом девочек и числом мальчиков. Тогда всего в классе 5 частей, то есть общее число учеников делится на 5. С другой стороны, учеников не меньше 31 и не более $19 \times 2 = 38$ (за партой – не более двух человек), и единственно возможный ответ – 35.
11. Первый разбойник взял 100 рублей и 20-ю часть оставшейся добычи, второй взял 200 рублей и 20-ю часть остатка, третий – 300 рублей и 20-ю часть остатка, и так далее. Оказалось, что добычу поделили поровну. Сколько разбойников и какова добыча?
Решение. Последний взял сколько-то рублей сразу и 20-ю часть остатка. Но добыча оказалась поделена поровну, значит, этот остаток равен нулю. Предпоследний сначала взял на 100 рублей меньше, чем последний, а затем – 20-ю часть остатка. В итоге у них оказалось поровну, то есть 20-я часть этого остатка и равна 100 рублям. Тогда этот остаток составлял 2000 рублей, и $19/20$ его забрал последний разбойник. Это составило 1900 рублей, и всего разбойников было 19. Суммарная добыча составляет $1900 \times 19 = 36100$ рублей.