Двадцать третья Летняя многопредметная школа Кировской области

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

10: Ранг. Линейные системы.

Упр1. Строки прямоугольной матрицы линейно независимы. Докажите, что

a) столбцов не меньше, чем строк;

b) можно вычеркнуть часть столбцов (возможно, ни одного) так, чтобы получилась невырожденная квадратная матрица.

Определение. Минор *прямоугольной* матрицы A – это определитель меньшей квадратной матрицы, полученной из A вычеркиванием строк и/или столбцов. Размер минора -– это число строк в полученной квадратной матрице.

Упр 2. В матрице есть k линейно независимых строк $\Leftrightarrow$ у матрицы есть ненулевой минор размера k.

Упр 3. Докажите, что в любой (прямоугольной) матрице наибольшее количество линейно независимых строк равно наибольшему количеству линейно независимых столбцов.

Определение. Наибольшее количество линейно независимых строк (столбцов) называется *рангом* матрицы.

Упр 4. Найдите ранг **a)** матрицы, составленной из одних единиц **b)** квадратной матрицы с нулями по одной диагонали и остальными единицами.

Определение. Наибольшее количество линейно независимых уравнений называется *рангом* системы линейных уравнений.

Предложение 5. Пусть у системы линейных уравнений ранга k с n неизвестными есть решение. Тогда можно выбрать n-k неизвестных так, что при подстановке в них любых значений система будет иметь единственное решение.

Задача 6. Есть 10 бананов и чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний можно проверить, все ли бананы весят одинаково?
Упр 7. Если в целочисленной матрице заменить все числа остатками по модулю p и рассмотреть ее как матрицу над $\mathbf{Z}_p$, то ранг матрицы не возрастет.
Упр 8. Найдите наименьший возможный ранг матрицы нечетного порядка, у которой по одной диагонали нули, а все остальные элементы по модулю равны 1.
Задача 9. Есть стадо из 101 коровы. Известно, что без любой коровы стадо делится на две равные по весу и численности половинки. Докажите, что все коровы весят одинаково.
Определение. *Произведение матрицы*-строки $(a_1,\dots, a_n)$ *на матрицу*-столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – это число $a_1b_1+\dots+a_nb_n$

Определение. *Произведение матрицы A* размера $m\times n$ *на матрицу B* размера $n\times p$ – это матрица $C=AB$ размера $m\times p$, где элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца равен произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.
Упр 10. Докажите, что, вообще говоря, умножение матриц некоммутативно, то есть приведите пример двух матриц A и B размера 2×2 такой, что $AB\neq BA$.
Упр 11. Докажите, что $(AB)^t=B^tA^t$.
Предложение 12. Пусть переменные $z_1, \dots, z_n$ выражены линейно через переменные $y_1,\dots,y_m$, при этом коэффициенты в выражении для каждого z_i взяты из i-й строки матрицы A. Аналогично выразим переменные $y_1, \dots,y_m$ через $x_1,\dots,x_p$ линейно с коэффициентами из матрицы

B. Тогда $z_1, \ldots, z_n$ выражаются через $x_1, \ldots, x_p$ линейно с коэффициентами из матрицы AB.
Теорема 13. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

Для самостоятельного решения

A22. Докажите, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.
A23. Докажите, что в матрице ранга r любой минор на пересечении r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов не равен 0.
A24* На отрезке [0,1] отмечены концы, а также конечное число точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.