

Делимость 2

06 июля

Лемма 1. Пусть a – целое, b – натуральное число. Тогда a можно единственным образом представить в виде $a = kb + r$, где k и r – целые, $0 \leq r < b$.

Определение 1. Число k в лемме 1 называется (неполным) частным, а число r – остатком при делении a на b с остатком. Если остаток равен 0, то a делится на b (без остатка) (записывается $a : b$).

Упр1. $x = 100k - 16$, k – целое. Чему равны частное и остаток при делении x а) на 100; б) на 5?

Упр2. Делимое и делитель увеличили в три раза. Как изменятся неполное частное и остаток?

Свойство. Разность двух чисел делится на $b \Leftrightarrow$ числа дают одинаковые остатки при делении на b .

Определение. В этом случае будем говорить, что числа равны по модулю b и писать $m \equiv n \pmod{b}$ или $m \equiv_b n$.

1. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 – простое число или 1.
2. Докажите, что среди десяти подряд идущих натуральных чисел есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

Теорема (действия с остатками). Пусть число a_1 дает при делении на b остаток r_1 , число a_2 – остаток r_2 . Тогда

- а) (сложение остатков) Число $a_1 + a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 + r_2$.
- б) (вычитание остатков) Число $a_1 - a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 - r_2$.
- в) (умножение остатков) Число $a_1 a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1 r_2$.

3. а) Докажите, что произведение 4 последовательных целых чисел делится на 24.

б) p, q простые числа, $p > q > 3$. Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

4. Докажите, что натуральное число сравнимо

- а) со своей суммой цифр по модулю 9;
- б) со своей знакопередающей суммой цифр по модулю 11.

5. Можно ли записать квадрат натурального числа используя по 10 раз цифры а) 2, 3, 6, б) 1, 2, 3?

6. Можно ли используя только цифры 2, 3, 7, 8 (возможно по несколько раз) составить квадрат натурального числа?

Упр3. Какие остатки может давать сумма двух квадратов при делении на 4?

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел непредставимых в виде суммы двух квадратов.

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел непредставимых в виде суммы трех квадратов.

9. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех точных кубов.

11. 12 последовательных натуральных чисел разбиты на 3 группы. Может ли оказаться так, что суммы квадратов чисел во всех группах одинаковы?