Увидеть двудольный граф

1. а) Мог ли шахматный конь дойти от левой нижней клетки доски до правой верхней ровно за 7 ходов?
б) Жука посадили в левую нижнюю вершину квадратной сетки 7х7 см. Каждым ходом жук пробегает по линиям сетки расстояние 3 см, нигде не поворачивая назад. За какое наименьшее число ходов он может прийти в правую верхнюю вершину?

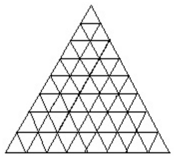
Определение. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что концы каждого ребра будут разного цвета.
Важный момент. На маршруте по рёбрам двудольного графа цвета вершин строго *чередуются*.
Примеры двудольных графов: а) граф коня на шахматной доске; **в)** граф куба; **г)** граф соседства клеток на шахматной доске.

2. а) Можно ли покрасить вершины 20-угольника в два цвета так, чтобы концы каждой стороны были разного цвета? **б)** А вершины 19-угольника?

Важный момент. В двудольном графе не может быть *нечётного цикла.* А вот графы чётных циклов и деревьев – двудольны.

3. а) Разбейте клетчатый квадрат 8x8 на домино 1x2 двух цветов так, чтобы домино одинакового цвета не граничили по отрезку.
б) Может ли в таком разбиении левое нижнее домино быть горизонтальным, а правое верхнее – вертикальным?

Раскрасить в два цвета *правильно* (то есть так, чтобы объекты одинакового цвета не соприкасались или не были связаны ребром) легче, если есть свойство, которое отличает одни объекты от других. Если присутствуют числа, таким свойством может быть *чётность*.



4. а) Большой треугольник разрезан на одинаковые треугольнички (см. рис.). Раскрасьте их в два цвета так, чтобы треугольнички одинакового цвета не соприкасались сторонами. Какое свойство отличает чёрные треугольники от белых?
б) Раскрасьте числа от 1 до 10 в два цвета так, чтобы никакое число не было больше на 3 или на 5 больше другого одноцветного. Какое свойство чисел отличает белые числа от чёрных?
в) Раскрасьте числа от 1 до 10 в два цвета так, чтобы никакое число не было в простое число раз больше одноцветного с ним. Какое свойство чисел отличает Какое свойство чисел отличает белые числа от чёрных?

Зачётные задачи

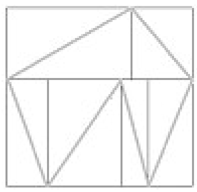
УД1. Нарисуйте двудольный граф с 6 вершинами и 9 рёбрами.

УД2. а) На некоторых клетках клетчатой доски стоят кони. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы кони одинакового цвета друг друга не били.
б) На некоторых *белых* клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы короли одинакового цвета друг друга не били.

УД3. Клетчатая сетка разбивает бумагу на квадратные клетки 1x1. По линиям сетки нарисован многоугольник. Может ли его периметр быть нечётным?

УД4. За какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти из одного угла доски 20x20 в противоположный угол?

УД5. Дан кубик Рубика 3x3x3.
а) Клетки на поверхности кубика объявили вершинами графа, а если у двух клеток есть общая сторона, они связаны ребром. Двудолен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?
б) Вершины клеток на поверхности кубика объявили вершинами графа, а стороны клеток объявили ребрами графа. Двудолен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?



УД6. а) Квадрат разбит на меньшие квадраты, не обязательно равные. Меньшие квадраты объявили вершинами графа, а квадраты с общим отрезком границы связаны ребром в графе. Может ли получиться не двудольный граф?
б) Правильный треугольник разбит на меньшие правильные треугольники, не обязательно равные. Меньшие треугольники объявили вершинами графа, а треугольники с общим отрезком границы связаны ребром в графе. Может ли получиться не двудольный граф?
УД7. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (см. рис. справа). А может ли на Большом острове быть нечётное число графств?