Рёбра кубиков и оклейка

1. Дан кубик Рубика 3х3х3. Его клетчатую поверхность оклеили *равными* прямоугольниками так, что границы каждого прямоугольника идут по границам клеток. Каждая клетка покрыта ровно одним прямоугольником. Прямоугольники могут перегибаться через рёбра кубика.
а) Может ли быть ровно 3 прямоугольника?
б) Может ли быть ровно 2 прямоугольника?
в) Может ли быть ровно 4 прямоугольника?
г) Может ли быть ровно 9 прямоугольников?

Поверхность кубика Рубика разбита на клетки. Имеем два графа: 1) рёбра – стороны клеток, вершины – вершины клеток; 2) рёбра – стороны клеток, вершины – клетки.

2. Дан кубик Рубика 3х3х3.
а) Клетки на поверхности кубика объявили вершинами графа, а если у двух клеток есть общая сторона, они связаны ребром. Двудолен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?
б) Вершины клеток на поверхности кубика объявили вершинами графа, а стороны клеток объявили ребрами графа. Двудолен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?

3. На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Для каждого ребра посчитали сумму чисел на двух гранях с данным общим ребром. Могут ли все суммы быть выписаны в таком порядке, чтобы получилась арифметическая прогрессия?

4. Дан кубик Рубика 3х3х3. Его клетчатую поверхность оклеили прямоугольниками 1хN так, что границы каждого прямоугольника идут по границам клеток. Каждая клетка покрыта ровно одним прямоугольником. Прямоугольники могут перегибаться через рёбра кубика Рубика.
а) Найдите все N, для которых такая оклейка возможна.
б) Для самого большого возможного N найдите общий периметр прямоугольников.
в) Для самого малого возможного N>3 найдите общую длину линий, по которым идут границы прямоугольников.

Зачётные задачи

РО1. Можно ли расставить на ребрах куба числа 1, 2, …, 12 так, чтобы суммы на всех тройках рёбер с общей вершиной были одинаковыми?

РО2. Муравей прополз по поверхности кубика Рубика 3х3х3 от одной вершины клетки до другой. Он ползал только по сторонам клеток, нигде не поворачивал назад и ни в какой вершине клетки не побывал дважды. Какой наибольший путь мог проползти муравей?

РО3. Каждая грань прямоугольного ящика разбита на одинаковые квадратные клетки. Ящик оклеен несколькими квадратами (они могут перегибаться через рёбра, среди них могут быть неодинаковые) без наложений и щелей.
а) Может ли быть всего три квадрата?
б) Длина, ширина и высота ящика различны. Может ли быть всего 5 квадратов?

РО4. а) Планета Рубик имеет форму куба с ребром 4000 км. Каналы идут по рёбрам куба и по граням, так что вся суша разделена на одинаковые квадратные клетки, каждая со стороной 200 км. Найдите общую длину каналов на планете (в километрах).

б) Планета Рубик имеет форму куба с ребром 4000 км. В центре каждой грани есть квадратное море со стороной 800 км и берегами, параллельными рёбрам, остальное суша. Каналы идут по рёбрам куба и по граням, так что вся суша разделена каналами и берегами морей на одинаковые квадратные клетки, каждая со стороной 200 км. Найдите общую длину каналов на планете (в километрах).

РО5. У 8 единичных кубиков размечены одинаково пронумерованы рёбра от 1 до 12. Из них сложен куб 2х2х2. Каждое ребро куба состоит из двух рёбер кубиков, их сумма номеров посчитана для каждого ребра куба.
а) Могут ли все суммы номеров быть равны?
б) Если да, какому наименьшему числу они могут быть равны?

РО6. В вершинах куба расставили числа 1, 2, …, 8, а затем для каждого ребра посчитали сумму чисел в его концах. Докажите, что среди сумм есть одинаковые.

РО7. а) Какое наибольшее число рёбер куба можно покрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами?
б) Поверхность кубика Рубика 2×2×2 разбита на единичные квадратики. Какое наибольшее число *сторон* этих квадратиков можно покрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами?

РО8. Несколько кубических коробочек одинакового размера (с крышками) могут быть вложены одна в другую как матрёшки. У каждой на всех ребрах задали направления (поставили стрелку), по-разному на разных коробочках.

а) Коробочек со стрелками две. Может ли случиться, что как ни вложи одну в другую, ровно 6 соприкасающихся стрелок будут направлены одинаково, а другие 6 – в противоположные стороны?

б) Коробочек со стрелками три. Может ли случиться, что как ни вложи одну в другую, ровно 6 соприкасающихся стрелок будут направлены одинаково, а другие 6 – в противоположные стороны?

РО9. Петя оклеил кубик 5×5×5 пентамино так, что каждое накрывает ровно пять клеток на поверхности кубика. Какова наименьшая возможная сумма периметров этих пентамино? (Пентамино – многоугольник из пяти единичных клеток. Пентамино можно перегибать через ребро.)