

# Графы: деревья

**Определение.** *Цикл* – это замкнутый путь в графе (он начинается и заканчивается в той же вершине), все рёбра и вершины цикла различны. В цикле не менее 3 рёбер.

**Пример.** Граф каждого многоугольника состоит из одного цикла.

1. В правильном многоугольнике проведём все диагонали, а стороны сотрём. Рассмотрим граф: вершины те же, а рёбра – все диагонали. Какой наибольший цикл есть в таком графе, полученном из

а) квадрата; б) пятиугольника; в) шестиугольника?

**Определение.** *Дерево* – это связный граф без циклов.

2. а) Нарисуйте все возможные различные деревья с 4 вершинами.

б) Нарисуйте четыре различных дерева с 7 вершинами. Почему число рёбер во всех деревьях одно и то же?

**Теорема (критерий деревьев).**

а) В дереве с  $n$  вершинами ровно  $n-1$  ребро.

б) Если в связном графе с  $n$  вершинами ровно  $n-1$  ребро, то это – дерево.

3. Сколько рёбер надо стереть в графе куба, чтобы получить дерево?

**Теорема.** В каждом связном графе можно стереть несколько рёбер и получить дерево. Оно называется *остовным деревом*.

**Доказательство.** Стерев в цикле ребро, можем на пути заменить это ребро обходом по остальным рёбрам цикла. Значит, граф останется связным. Будем стирать по ребру пока есть циклы. Когда циклы закончатся, получим дерево.

**Следствие.** В связном графе с  $n$  вершинами не менее  $n-1$  ребра.

**Доказательство.** В связном графе не меньше рёбер, чем в его остовном дереве.

4. Из спичек сложен квадрат со стороной в 5 спичек, разбитый на клетки со стороной в 1 спичку. В угловой клетке сидит жук, который не может переползть через спичку. Разрешается убирать внутренние спички. Какое наименьшее число спичек надо убрать чтобы жук мог доползти до каждой клетки?

**Определение.** *Лист* – это вершина степени 1 в дереве (её ещё называют *висячей* вершиной).

5. В дереве есть рёбра, а все вершины степени 1 или 2. Сколько в этом дереве листьев?

**Теорема.** Если в дереве есть хотя бы одно ребро, то в нём есть хотя бы два листа.

**Доказательство.** Пойдём из любой вершины не возвращаясь. Циклов нет, поэтому путь закончится. Конечная вершина – лист. Пойдём из листа не возвращаясь. Упрёмся в другой лист.

## Зачётные задачи

Де1. В дереве 25 вершин.

а) Каково наименьшее число листьев в нём?

б) Каково наибольшее число листьев в нём?

Де2. Сколько есть разных деревьев с 6 вершинами?

Де3. а) В дереве 6 вершин степени 1 и 6 вершин степени 2, а остальные вершины – степени 3. Сколько рёбер в этом дереве?

б) Нарисуйте пример такого дерева.

Де4. В 13-угольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны 13-угольника и проведенные диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета (каждую целиком в один цвет) так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп – по красным?

Де5. Из спичек сложен большой квадрат, разбитый на 64 единичных квадрата со стороной в 1 спичку.

а) Какое наименьшее число спичек надо убрать так, чтобы доска распалась на 8 равных многоугольников?

б\*) Какое наименьшее число спичек надо убрать так, чтобы доска распалась на 4 равных многоугольника?

Деб\*. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в 100 клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).