Целые и нецелые

1. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому – 101 г мёда, а третьему – 102 г перекиси водорода. (Гирьки он ставил только на одну чашку весов.) Могла ли каждая гирька быть легче 90 г?

2. Есть 10 карточек, на каждой по числу. Для каждого набора карточек вычислили его сумму. Не все суммы – целые. Какое наибольшее количество сумм может быть целыми?

Определение. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Например, 3,14 можно округлить до 3 или до 4.

3. а) Записано верное равенство: 100 слагаемых и их сумма. Докажите, что все нецелые числа можно округлить до целого так, чтобы равенство осталось верным.

б) В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.

в) В вершинах пятиугольной призмы выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Всегда ли можно все 25 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах?

4. Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j ($i \neq j$) как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ – целые.

5. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой *целый* вес от 5 г до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?

6. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?

7. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Выписаны также суммы для каждой строки, для каждого столбца и для всей таблицы. Докажите, что все выписанные числа можно округлить так, чтобы все суммы по-прежнему сходились.

Зачетные задачи

ЦН2. Алёна и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же n чисел в одном порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и т.д.) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёна округляет до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёна не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёны?

ЦН4. Дан конечный двудольный граф. Известно, что если записать произвольные числа в его белые вершины, а в каждую черную записать сумму чисел в смежных вершинах, то такой набор чисел можно округлить так, чтобы суммы по-прежнему сходились. Докажите, что если произвольные числа записать в чёрные вершины, а их суммы – в белые, то полученный набор чисел тоже всегда можно округлить, чтобы суммы сходились.

ЦН5. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора?

ЦН6. а) Из колоды отложили часть карт. Докажите, что оставшиеся можно разделить между двумя игроками так, чтобы у них общее число карт, число карт каждой масти и число карт каждого достоинства отличалось не более, чем на 1.

б) То же, но карты делятся между тремя игроками.