Индукция

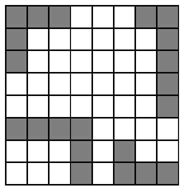
Математическая индукция помогает коротко записать строгое решения, но не объясняет, как его придумать, и в чем его смысл.

Индуктивное построение. Наиболее оправдано применение индукции при построении сложных конструкций, когда очередной этаж строится на основе уже построенных нижних этажей. Такое построение может быть при необходимости преобразовано в явный алгоритм.

1. От прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что для любого n найдется прямоугольник, для которого процесс закончится ровно после n-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера.

2. В компании из n человек ($n \geq 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n-4$ звонка все смогут узнать все новости?

Целься сверху. Если конструкция для $n+1$ не единственна, то связь с конструкцией для n надо осуществлять «спуском из $n+1$», а не «подъёмом из n». В частности, надо убедиться, что всякая конструкция для $n+1$ получается из конструкции для n. Из такого индукционного рассуждения затем часто получают «обратным ходом» построение снизу вверх.

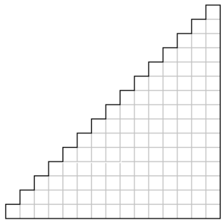


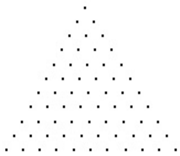
3. Клетчатый шестиугольник, составленный из двух полосок ширины 1, назовём *уголком* (см. примеры серых уголков на рисунке). Докажите, что произвольный клетчатый квадрат без любой клетки можно разбить на клетчатые уголки с различным нечётным числом клеток.

4. Саша знает список из 33 городов страны Оз и знает, что каждая пара городов соединена отдельной дорогой с односторонним движением. За один вопрос он может про любую пару городов узнать в какую сторону ведёт дорога между ними. Как ему за 32 вопроса найти город, в который можно добраться из любого другого (возможно, через другие города)?

Рекурсия

Редукция сводит решение задачи к более простой. Пусть удается свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта (чаще всего меньшим на 1, но не обязательно). Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это – *рекурсия*. Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.





5. На какое наименьшее число квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. Рис.).

6. На плоскости отмечены 66 точек (см. рис). Докажите, что

а) любые 65 из них можно зачеркнуть 10-ю прямыми;

б) все 66 зачеркнуть 10-ю прямыми невозможно.

7. Докажите, что сумма углов в невыпуклом n-угольнике равна $180°(n-2)$.

8. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?

9. В клетках квадратной таблицы 10×10 клеток стоит ровно 9 нулей и проведена диагональ из левого верхнего в правый нижний угол. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Докажите, что можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю.

Зачетные задачи

И1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

И2. Есть гири с номерами от 1 до n, для каждого k вес k-й гирьки целый и не превосходит k, а сумма всех весов чётна. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

И3. Натуральное число называется *зеброй*, если оно либо однозначно, либо в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Докажите, что всякое натуральное число, начиная с числа 3, можно представить в виде суммы трех зебр.

И4. Докажите, что числа от 1 до 2019 можно записать в строку в таком порядке, чтобы для каждой пары чисел ни одно стоящее между ними число не равнялось их полусумме. (Числа могут стоять и не рядом; например, группа 1, 2, 5, 9 запрещена, так как (1+9)/2=5).