

## Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе  $V$  – число вершин,  $P$  – число ребер,  $C$  – число компонент связности.

**Факт 1. а)** В дереве (то есть связном графе без циклов)  $V=P+1$ .

**б)** В графе без циклов  $V=P+C$

**Факт 2. а)** В связном графе  $P \geq V-1$ . **б)** В любом графе  $P \geq V-C$ .

1. В выпуклом многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны и проведенные диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп – по красным?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для  $V, P, C$ , можно получать нетривиальные оценки.

2. Из одинаковых жестких пятиугольников склеен додекаэдр. По какому наибольшему числу рёбер его можно разрезать так, чтобы получилась плоская развёртка из одного куска?

3. **а)** Дворец шаха представляет в квадрат  $8 \times 8$ , разбитый внутренними стенами на квадратные комнаты  $1 \times 1$ . Шах хочет разбить их на 4 связные равные по площади квартиры, снеся как можно меньше внутренних стен длины 1. Сколько стен ему придется снести?

**б)** То же, но внутри квартир не должно быть стен между соседними комнатами.

4. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в  $n$  клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

Для целей задачи можно картинку преобразовать. Например, убрав часть линий, объединить группу клеток в одну вершину.

5. Из спичек сложена шахматная доска. В каждой клетке сидит по жуку, которые через спичку не ползают. Спички внешнего контура намазаны мёдом. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы каждый жук мог доползти до спички с мёдом.

6. Шахматную доску покрасили в 33 цвета. Пара различных цветов называется *хорошей*, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на две клетки этих цветов. Каково минимальное число хороших пар цветов?

7. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно разрезать по одной диагонали так, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

8. Из спичек выложена доска  $8 \times 8$  так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы после этого не осталось ни одного контура прямоугольника?

## Зачётные задачи

**СГ1.** На клетчатой бумаге по границам клеток обведен стоугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

**СГ2.** Отряд из 32 витязей ровно один месяц охранял дальнюю заставу. Каждый день одна пара витязей ходила в дозор. За службу витязь получает 1, 2 или 3 рубля в месяц. Докажите, что можно заплатить витязям так, чтобы в каждой паре дозорных суммарная оплата была 4 рубля, и хотя бы одному витязю заплатили 3 рубля.

**СГ3.** Клетчатый квадрат  $8 \times 8$  разрезан по границам клеток на 3 многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение периметра, если сторона клетки равна 1.

**СГ4.** Из кубиков  $1 \times 1 \times 1$  склеен куб  $3 \times 3 \times 3$ . Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась связная фигура, чья проекция на каждую из граней исходного куба была квадратом  $3 \times 3$  ?

А.Шаповалов. Московские сборы, 9 апреля 2019 г, 9 класс, гр. Шурупы. [www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html](http://www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html)