

Переправы

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

0. Клетки шахматной доски покрасили в синий и красный цвета, оба цвета есть. Докажите, что с какой-то синей клетки можно пойти конем на красную.

1'. По кругу расставлены 2015 натуральных чисел, среди них есть числа 20 и 15. Докажите, что у некоторого числа сумма соседей нечётна.

Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

2'. Натуральные числа 1, 2, 3, ..., 100 раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета не менее 30, а 1 и 100 – одинакового цвета. Докажите, что найдутся синяя и красная пара с одинаковыми суммами.

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. а) Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?

б) Можно ли расставить в таблице 8×8 различные двузначные числа так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 3?

4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдутся синяя и красная пара с одинаковыми суммами.

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

9. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как шахматная ладья, но только на одну клетку за ход. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на чёрную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

10. Три ладьи стояли на клетках a_1 , b_1 и a_2 . За несколько ходов они перешли в клетки у противоположного угла доски: с a_1 – на h_8 , с b_1 – на h_7 , с a_2 – на g_8 . Докажите, что после какого-то из ходов какая-то из ладей не была других ладей.