

Заключительная олимпиада группы 8 «профи»

1. Даны три натуральных числа: n , $n+22$ и $n+44$. Какое наибольшее количество из них может быть простыми?
2. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB – наименьшая, M и H – точки пересечения медиан и высот соответственно. Докажите, что H лежит внутри треугольника AMB .
3. На острове живут два племени: лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). 100 жителей встали в круг, все про всех всё знают. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько, сколько лжецов. Какое наименьшее число рыцарей могло быть в круге?
4. Для некоторых натуральных чисел a , b , c и d выполняются равенства $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}$.
Докажите, что $a = c$ и $b = d$.
5. Кощей 1 сентября заточил в темницу Ивана Царевича и выдал ему 100 разных монет, половина из которых – заколдованные (какие именно – знает только кощей). Каждый день Иван раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну заколдованных монет или поровну обычных, кощей отпустит Ивана. Сможет ли Иван гарантированно освободиться в сентябре?

21 сентября 2015 г., 8 профи, Сириус. А.Шаповалов, А.Русаков www.ashap.info

Заключительная олимпиада группы 8 «кружки»

1. Можно ли представить какое-нибудь простое число как сумму трех последовательных натуральных чисел?
2. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB – наименьшая, M и H – точки пересечения медиан и высот соответственно. Докажите, что H лежит внутри треугольника AMB .
3. На острове живут два племени: лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). 100 жителей встали в круг, все про всех всё знают. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Верно ли, что *оба* ваших соседа – рыцари?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее число рыцарей могло быть в круге?
4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, *все цифры в их записи различны*. Какие значения может принимать НОД этих чисел? (Найдите все значения и докажите, что других нет).
5. Кощей 1 сентября заточил в темницу Ивана Царевича и выдал ему 100 разных монет, половина из которых – заколдованные (какие именно – знает только кощей). Каждый день Иван раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну заколдованных монет или поровну обычных, кощей отпустит Ивана. Сможет ли Иван гарантированно освободиться в сентябре?

21 сентября 2015 г., 8 кружки, Сириус. А.Шаповалов, А.Русаков www.ashap.info