Площади

Свойства площадей.

1. Площадь целого равна сумме площадей частей.
2. Равные фигуры имеют равные площади.
3. Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

Теорема 1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению стороны AD на расстояние между прямыми AD и BC.

Теорема 2. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Теорема 3. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Упр4. Докажите, что

а) медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника;

б) три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

Упр5. Докажите, что а) площадь треугольника со сторонами a, b, c не превосходит $\frac{ab}{2}$; б) площадь четырехугольника с диагоналями p и q не превосходит $\frac{pq}{2}$.

Упр6. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 1.

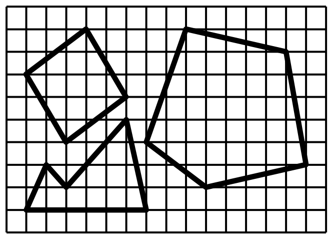

рис.1

Упр7. Существует ли такой треугольник, что

а) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2;

б) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2;

в) все стороны треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2?

Зад8. а) Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали. Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника.

б) Середины соседних сторон выпуклого четырехугольника соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади данного.

Зад9. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в узлах сетки не менее $\frac{1}{2}$.

Зад10. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что AD параллельна BC $\Leftrightarrow$ треугольники ABO и CDO равновелики.

Теорема 11. а) Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности.

б) Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности.

Зад12. а) Преподаватель и школьник делят квадратный пирог. Преподаватель отмечает внутри пирога точку, а школьник соединяет ее отрезками со всеми вершинами квадрата и забирает себе любые два куска, не имеющие общих сторон. Как должен действовать преподаватель, чтобы получить побольше пирога?

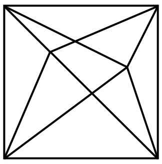

рис.2

б) Внутри квадрата отметим две точки и соединим их отрезками со всеми вершинами (см. рис. 2). Могут ли все девять полученных частей иметь одинаковую площадь?

Зад13. Внутри равностороннего треугольника выбрана точка, и из нее опущены перпендикуляры на все три стороны. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от выбора точки.

Для самостоятельного решения

Пл1. Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке (см. рисунок 3). При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

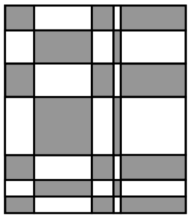

рис 3

Пл2. Стороны прямоугольника на шахматной доске параллельны сторонам доски. Докажите, что разность суммарных площадей белых и черных частей прямоугольника не превосходит площади одной клетки.

Пл3. Докажите неравенство для площади четырехугольника (a,b,c,d – стороны по порядку): $S \le (ac+bd)/2$.