

ГМТ и замечательные точки треугольника

Определение. ГМТ - это геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию. Для доказательства того, что некоторое множество точек является ГМТ надо доказать два факта:

- а) для каждой точки множества условие выполнено;
- б) если для точки условие выполнено, она принадлежит множеству.

0. Опишите как ГМТ а) окружность; б) серединный перпендикуляр к отрезку; в) биссектрису угла.

1. Найдите ГМТ

- а) удаленных от данной точки O на расстояние не более r ;
- б) удаленных от точки A не дальше, чем от точки B ;
- в) равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

2. Докажите, что

- а) три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- б) эта точка является центром окружности, проходящей через все вершины треугольника (*описанная* окружность).

3. Докажите, что

- а) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;
- б) эта точка является центром окружности, касающейся всех сторон треугольника (*вписанная* окружность);
- в) 3 прямые продолжают стороны некоторого треугольника.

Докажите, что есть 4 точки, равноудаленные от этих прямых (это центры вписанной и трёх *внеписанных* окружностей).

4. а) Дан треугольник ABC . Найдите ГМТ X , лежащих внутри треугольника и таких, что площади треугольников ABX и ACX равны.

б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. (Эта точка называется *центром масс* треугольника.)

в) Докажите, что ортоцентр делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Для самостоятельного решения

ГМТ1. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ X , для которых
 $AX + BX = CX + DX$.

ГМТ2. Дан треугольник ABC . Найдите ГМТ X , таких, что треугольники ABX и ABC равновелики.

ГМТ3. Дан прямой угол. Найдите ГМТ середин отрезков длины a с концами на сторонах данного угла.

ГМТ4. Дан треугольник ABC . Найдите ГМТ X таких, что площади ABX и ACX равны.

ГМТ5. Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов, таких, что оставшиеся три вершины лежат на двух данных перпендикулярных прямых.

ГМТ6. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $AC_1=AB_1$, $BA_1=BC_1$ и $CA_1=CB_1$. Докажите, что перпендикуляры восстановленные в точках C_1 , A_1 и B_1 к сторонам AB , BC и CA соответственно пересекаются в одной точке.

Сириус, 7 класс, 6 мая 2016 г, www.ashap.info/Uroki/Sirius/1605/index.html