

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства для сумм длин обычно опираются на неравенство треугольника. Часто приходится комбинировать несколько неравенств, складывая и умножая/деля их.

Упражнение 1. Докажите, что если отрезки AB и CD пересекаются, то $AC+BD < AB+CD$.

Задача 2. Докажите, что в четырехугольнике сумма длин сторон

а) меньше удвоенной суммы длин диагоналей;

б) больше суммы длин диагоналей.

Доказывать неравенства помогают посредники и дополнительные построения. Для сравнения суммы отрезков с другим отрезком такие построения нужны почти всегда.

Задача 3. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все такие точки X , что $AX+CX = BX+DX$.

Задача 4. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы его сторон, выходящих из той же вершины.

При сравнении высот и расстояний до прямой помогает подсчет площадей. Для доказательства взаимного расположения можно привлекать ГМТ.

Лемма 5. Если $АН$ и $ВК$ – высоты в треугольнике ABC , то $BC > AC \Leftrightarrow BK > AN$.

Задача 6. В треугольнике ABC $AB > AC$. Докажите, что середина M стороны BC ближе к прямой AB чем к AC .

Важным является такое неравенство сторон и углов.

Теорема 7. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Следствие 8. Сторона против тупого или прямого угла в треугольнике – наибольшая.

Следствие 9 (наклонная тем больше, чем больше её проекция). Если $АН$ – высота в треугольнике ABC , то $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$.

Задача 10. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Зад10. Дан угол и точка внутри него. Она отражается симметрично относительно сторон угла, и получившиеся точки соединяются отрезком. Докажите, что часть этого отрезка, отсекаемая углом, составляет меньше половины его длины.

Для самостоятельного решения

ГН1. Три дома соединены дорожками. Внутри треугольника, образованного дорожками, построена беседка. От беседки к каждому из домов ведет прямая тропинка. Требуется заасфальтировать либо все дорожки, либо все тропинки. Докажите, что а) на тропинки уйдет меньше асфальта, б) а если их покрывать асфальтом в два слоя, то больше.

ГН2. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором сумма длин диагоналей равна периметру?

ГН3. Докажите, что сумма высот треугольника меньше суммы его сторон.