

## ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ОБХОДЫ

**Определение.** Путь, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

**Теорема 1.** а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

**2.** На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь, проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу.

**Лемма 3.** а) Если в графе степени всех вершин больше 1, в нем есть цикл.

б) Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

**Теорема 4.** Дан связный граф.

а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;

б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

**5.** Докажите, что есть строка из 37 ненулевых цифр, в которой каждая пара различных цифр где-то стоит рядом.

**6.** Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата  $4 \times 4$  представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?

**Определение.** Граф *ориентирован*, если на каждом из его ребер задано направление (Будем называть такие ребра *стрелками*). Допускаются стрелки из А в А (*петли*) и пары стрелок из А в В и из В в А.

**Теорема 7.** Если в ориентированном связном графе из каждой вершины выходит столько же стрелок, сколько в неё входит, то в нём есть эйлеров цикл.

**8.** Докажите, что есть последовательность из 82 цифр, в которой можно подчеркнуть любое двузначное число, не кратное 10.

**9.** На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 3 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 1002 нажатий.

### Ещё задачи

**ЭП1.** Город в плане выглядит как квадрат  $3 \times 3$ , каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

**ЭП2.** Двоим патрульным с одним самокатом поручено прочесать 8 дорог, длины которых (в км) обозначены на схеме (см. рис). По каждому участку достаточно пройти или проехать одному патрульному. Патрульный покрывает за мин 100 м пешком или 200 м на самокате. Они могут стартовать из разных точек, и договорились, что каждый часть участков прочесет пешком, а часть — на самокате, передав его при встрече. За какое наименьшее время они могут выполнить задание?

