

Ослабление условий

Лучше синица в руках, чем журавль в небе.

1. а) Придумайте три различных натуральных числа, чтобы каждое делилось на разность двух других, и все разности были различны;
б) то же, но все числа больше 100;
в) как в (б), но все разности меньше самого маленького из чисел.

2. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линий дважды, нарисовать изображенную на рис. 1 фигуру, если пересекать уже нарисованные линии нельзя? (Касаться можно).

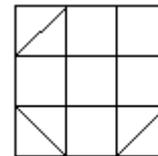


Рис. 1

3. Подставьте в знаменатели вместо звёздочек различные натуральные числа, чтобы равенства были верными:

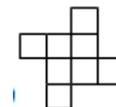
- а) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$;
б) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$.

4. а) Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно 3 отмеченные точки.

б) Расставьте на шахматной доске коней так, чтобы каждый бил ровно трех других.

в) А четырёх?

5. Многоугольником (см. рис. справа), перегибая его по границам клеток, можно обернуть квадрат 2×2 , то есть покрыть все клетки квадрата в один слой с двух сторон.



а) Можно ли каким-нибудь многоугольником из 18 клеток с периметром 38 обернуть квадрат 3×3 ?

б) Можно ли каким-нибудь многоугольником из 200 клеток с периметром 400 обернуть квадрат 10×10 ?

6. а) Докажите, что существует палиндром, делящийся на 5^5 .

б) Число N – палиндром. Докажите, что есть палиндром, кратный $27N$.

в) Докажите, что есть палиндром, кратный 6^5 .

(Напомним, что *палиндром* – это число, которое не меняется при записи его цифр в обратном порядке).

Ещё задачи

ОУ1. Есть 10 двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два непересекающихся набора с одинаковыми суммами.

ОУ2. Приведите пример таблицы 3×3 , заполненной девятью различными натуральными числами так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).