

Построение шаг за шагом

Многоэтажный дом строят не сразу, а последовательно: этаж за этажом. Следующий этаж опирается на предыдущий. Так и сложную конструкцию можно получить из простой базовой конструкции, сделав нужное число однотипных добавок.

1. Число 20 делится на 5 и равно сумме своих четырех делителей: $20=10+5+4+1$. Найдите число с такими же свойствами, но в сумме должно быть **а) 5; б) 7** слагаемых.

2. Расставьте на шахматной доске несколько коней так, чтобы каждый был

а) ровно 2; б) ровно 3; в*) ровно 4 других коня.

Вместо примера для данного числа (слагаемых, частей, коней и т. п.) удобнее бывает строить серию похожих примеров для меньших чисел, начиная с очевидного примерчика.

3. Придумайте набор из 7 гирь нечетного веса (в граммах) такой, что в любой группе гирь одна тяжелее остальных вместе взятых.

4. **а)** Нарисуйте прямоугольник, разбитый на несколько квадратов, из которых один закрашен, а все остальные – разного размера (закрашенный квадрат может совпадать по размеру с незакрашенным).

б) Нарисуйте прямоугольник, разбитый так на 7 квадратов.

Шаги построения часто следуют за шагам некоторого процесса. При этом обеспечиваем то, что нам нужно, отдельно на каждом шаге.

5. Петя выставляет на шахматную доску по одной бесцветной ладье за ход, а Катя красит выставленную ладью в один из 5 цветов. Докажите, что на каждом шаге Катя может красить так, чтобы ни в какой момент ладьи одинакового цвета друг друга не были. (Ладьи, между которыми на горизонтали или вертикали стоит другая ладья, *не* бывают друг друга).

6. На доске написано число 2017. Петя и Катя по очереди приписывают к нему справа по одной цифры 1, 2 или 3. Тот, кто сделает число с двумя одинаковыми цифрами рядом или число, делящееся на 3 – проигрывает. Игра заканчивается через 20 ходов. Докажите, что при правильной игре она закончится вничью.

Если процесса нет, его бывает полезно организовать. Не забудьте выбрать правильную цель для каждого шага!

7. В лодке, вмещающей только двух человек, с левого берега реки на правый должны переправиться 7 людоедов и 8 монахов. Монахи боятся, чтобы на каком-нибудь берегу их не оказалось меньше, чем людоедов. Как им всем переправиться?

8. Шахматную доску 10×10 разбили на 200 треугольников, проведя в каждой клетке одну из двух диагоналей. Докажите, что треугольники можно раскрасить в три цвета так, чтобы треугольники с общей стороной всегда были разного цвета.

Ещё задачи

9. На левом берегу реки собрались 6 мудрецов разного возраста. Есть лодочник с лодкой, который может перевозить пассажиров по одному. Посреди реки есть островок. По правилам, когда лодочник подплыл к берегу или острову и приглашает пассажира, в лодку садится самый старший из находящихся там мудрецов. Кроме того, мудрец не может высаживаться из лодки на берег или островок, если там уже есть мудрецы старше него. Лодочник сам решает, откуда он везет пассажира и куда. Как ему переправить всех мудрецов на правый берег?

10. На доске написано число 1. Петя приписывают к нему справа по одной цифры 1 или 2, а Катя ответным ходом меняет местами любые две цифры. Игра заканчивается после того, как оба сделают по 20 ходов. Если полученное 21-значное число окажется палиндромом (то есть читается одинаково слева направо или справа налево), выигрывает Катя, иначе – Петя. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?