

Построение шаг за шагом

Многоэтажный дом строят не сразу, а последовательно: этаж за этажом. Следующий этаж опирается на предыдущий. Так и сложную конструкцию можно получить из простой базовой конструкции, сделав нужное число однотипных добавок.

1. Число 20 делится на 5 и равно сумме своих четырех делителей: $20=10+5+4+1$. Найдите число с такими же свойствами, но в сумме должно быть а) 5; б) 7 слагаемых.
2. Расставьте на шахматной доске несколько коней так, чтобы каждый бил а) ровно 2; б) ровно 3; в*) ровно 4 других коня.

Вместо примера для данного числа (слагаемых, частей, коней и т. п.) удобнее бывает строить серию похожих примеров для меньших чисел, начиная с очевидного примерчика.

3. Нарисуйте прямоугольник, разбитый на 9 квадратов, из которых один закрашен, а все остальные – разного размера.
- 4**. Нарисуйте на плоскости такой набор точек, чтобы на расстоянии 1 от каждой точки нашлось ровно 4 точки набора.

Шаги построения часто следуют за шагам некоторого процесса.

5. Вася выставляет по одной бесцветных ладей на шахматную доску, а Петя красит выставленную ладью в один из 5 цветов. Докажите, что Петя может делать это так, чтобы ни в какой момент ладьи одинакового цвета друг друга не били. (Ладьи, между которыми на горизонтали или вертикали стоит другая ладья, не бьют друг друга)

Если процесса нет, его бывает полезно организовать.

6. В компании из нескольких человек каждый день узнают по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Они перезваниваются, пока все не узнают все новости.
а) Для полного оповещения им хватает 12 звонков. К компании присоединился ещё один человек. Сколько звонков теперь им заведомо хватит для полного оповещения?
б) Как компании из 20 человек сделать полное оповещение за 36 звонков?

7. Шахматную доску 10×10 разбили на 200 треугольников, проведя в каждой клетке одну из двух диагоналей. Докажите, что треугольники можно раскрасить в три цвета так, чтобы треугольники с общей стороной всегда были разного цвета.

- 8*. Придумайте натуральное число с такими тремя условиями: 1) в записи есть все цифры от 1 до 4, а других нет; 2) если подчеркнуть в нём любые две соседние цифры или группы цифр, то будут подчеркнуты разные числа; 3) если к числу приписать справа или слева любую из цифр от 1 до 4, то условие (2) нарушается.