Задача о самопересекающейся ломаной

А.ШАПОВАЛОВ, А.ЛЕБЕДЕВ

В ТУРНИРЕ ГОРОДОВ ОСЕНЬЮ 2013 ГОДА БЫЛА такая задача:

На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причем через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)

К сожалению авторов и организаторов турнира, пока в работах школьников не удалось найти полного решения, все баллы были получены лишь за частичные продвижения. Тем удивительнее узнать, что у задачи есть сравнительно короткое решение.

Но начнем с истории, которая у задачи, наоборот, достаточно длинная и богатая.

Началось все лет 17 тому назад с придуманной А.Шаповаловым несложной задачки:

Замкнутая ломаная пересекает каждое свое звено ровно один раз. Может ли каждая точка самопересечения делить оба пересекающихся звена в отношении 2:1?

Ответ: может; пример легко строится. Достаточно вспомнить, что в отношении 2:1 делятся пересекающиеся медианы. А звенья ломаной должны разбиваться на пары пересекающихся. Вот и составим ломаную из пар медиан. Чтобы концы ломаной соединялись, треугольники должны соприкасаться равными «боковыми» сторонами. Естественно приходит в голову набор треугольников с общей вершиной. Вот простейший пример. Внутри произвольного треугольника ABC отметим произвольную точку O. Точки K, L и M – середины отрезков OA, OB и OC соответственно (рис.1). Тогда пересекающиеся отрезки – это медианы одного треугольника (например, AL и BK – медианы треугольника AOB), поэтому делятся точкой пересечения в отношении 1:2. Значит, ломаная $ALCKBM$ – искомая.

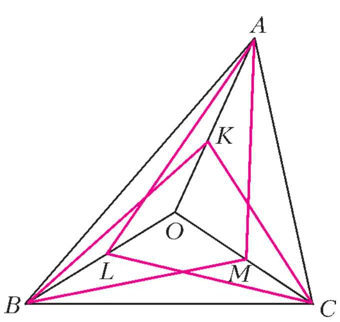

Рис.1

Можно еще заметить, что при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/2$ треугольник ABC переходит в треугольник KLM. Заменив коэффициент гомотетии на $p/q < 1$, мы точно так же получим замкнутую 6-звенную самопересекающуюся ломаную, где точки самопересечения делят звенья в отношении p:q. А вот пример с отношением 1:1 (т.е. деление звеньев строго пополам) так не получишь. Но, может быть, такой пример получается каким-то другим способом? Ведь пары пересекающихся отрезков будут диагоналями параллелограммов. Автор долго возился, прикладывая параллелограммы друг к другу и так, и этак, но не преуспел. Параллелограммы упорно налезали друг на друга. Видимо, такой ломаной не существовало, но причину запрета обнаружить не вышло. Тогда автор стал подсовывать эту задачу коллегам. У них тоже ничего не получалось. Так продолжалось долго. В 2004 году, казалось, случился прорыв: задача была дана на Московской устной олимпиаде по геометрии. Увидев это, автор обрадовался «Решили, наконец!», но радость была преждевременной. Прочитав условие внимательнее, автор увидел, что речь идет о пространственной ломаной (см. задачу 2). Понятно, что эта задача легче, так как в пространстве «убить» ненужные пересечения гораздо проще.

В 2008 году случился, наконец, настоящий прорыв. Молодой математик Алексей Лебедев решил задачу и для плоского случая. Правда, его решение опиралось на интегралы. Но оно сделало главное: выявило причину запрета. Изложить это на школьном уровне теперь не составляло труда. Авторы тут же предложили задачу на олимпиады самого высокого уровня: Международную, Всероссийскую, Московскую, Турнир городов. Задача вызвала интерес, но в варианты всё не попадала. Через пару лет мы задали прямой вопрос одному из известных геометров и члену методической комиссии Российской олимпиады: ведь отличная задача, почему не ставят в вариант? Ответ был неожиданным: «Задача очень нравится, и мы ее обязательно поставим – как только ее сможет решит кто-нибудь еще, кроме автора…». Ждать пришлось почти 5 лет.

Но пора перейти к решению.

Решение. Ключевая идея – посчитать двумя способами площадь, охватываемую ломаной. Но какую именно площадь считать? Для несамопересекающейся ломаной все просто – это площадь ограниченного ею многоугольника. Точнее говоря, ломаная разбивает плоскость на две области – ограниченную и неограниченную, и мы считаем площадь единственной ограниченной области. Но у замкнутой самопересекающейся ломаной ситуация сложнее: среди областей, на которые она разбивает плоскость, ограниченных несколько. Площадь какой или каких считать? Просто просуммировать площади всех ограниченных областей не годится – такая сумма ведет себя «плохо». Она, например, может меняться «скачком» при малом шевелении ломаной (рис.2). Некоторые области надо от-

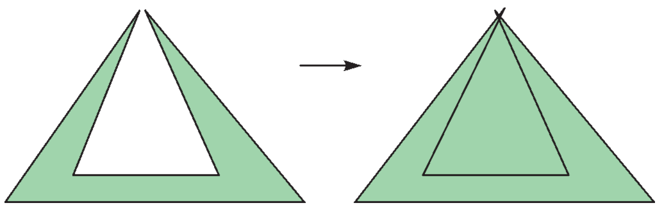

Рис.2

браковать. Вспомним, как мы отличаем точки внутри многоугольника от точек снаружи (на практике такое приходится делать для невыпуклых многоугольников и многоугольников в памяти компьютера). Для наглядности покрасим внутреннюю область в черный цвет, а внешнюю, неограниченную – в белый. Тогда выполнено такое свойство: любой путь между точками разного цвета пересекает границу многоугольника *нечетное* число раз, а путь между точками одинакового цвета– *четное*. Отсюда получается простоеправило.

Правило раскраски. *Выбираем какую-нибудь точку O, заведомо лежащую во внешней области; любую другую точку A, не лежащую на границе, соединяем путем с O; если этот путь пересекает границу четное число раз, делаем A белой, иначе – черной.*

(Чтобы не возникало случаев, когда общая точка пути и границы является *касанием*, а не пересечением, достаточно рассматривать пути, которые тоже являются ломаными, и при этом вершины пути не лежат на контуре многоугольника, а вершины многоугольника – на пути).

Оказывается, по такому же правилу можно раскрасить области, на которые разбивает плоскость самопересекающаяся ломаная. Оговоримся только, что мы не рассматриваем ломаные, которые по какому-нибудь отрезку ненулевой длины проходят более одного раза.

Лемма о раскраске. *Замкнутая ломаная делит плоскость на области, из которых не ограничена ровно одна. Тогда все области можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы неограниченная область была белой, и у областей одинакового цвета не было общих отрезков границы (рис.3).*

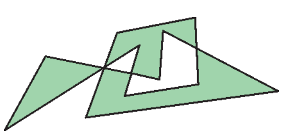

Рис.3

Набросок доказательства леммы см. в конце статьи. Пока же отметим, что каждая из черных областей будет, очевидно, многоугольником. У этих многоугольников нет общих отрезков сторон, они могут соприкасаться только в вершинах. Хотя бы одна черная область есть, поэтому сумма площадей черных многоугольников положительна и конечна. Нам понадобится еще один способ считать эту площадь: через сумму ориентированных площадей.

Определение. *Пусть дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная и зафиксирован порядок обхода ее вершин. Охватываемая ею ориентированная площадь по модулю равна площади ограниченного ею многоугольника, но может быть и отрицательной. А именно, выбирается знак плюс, если обход выполнен против часовой стрелки, и минус – если по часовой стрелке.*

Будем обозначать обычную площадь P, а ориентированную S. Заметим, что ориентированная площадь меняет знак при смене порядка обхода на противоположный. Для ориентированной площади выполнена замечательная формула.

Формула ориентированной площади. *Пусть $ABC\ldots YZ$ – замкнутая несамопересекающаяся ломаная, а O – произвольная точка. Тогда*

$$S_{ABC\ldots YZ} = S_{OAB} + S_{OBC} + \ldots + S_{OYZ} + S_{OZA}\,.$$

Суть формулы станет яснее, если мы ее докажем для примера, приведенного на рисунке 4:

$$S_{ABCDE} = P_{ABCDE} = P_{AODE} - P_{AODBC} =$$

$$= \left(P_{ODE} + P_{OEA}\right) - \left(P_{OAB} + P_{ABC} + P_{OCD}\right) =$$

$$= S_{ODE} + S_{OEA} + S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD}$$

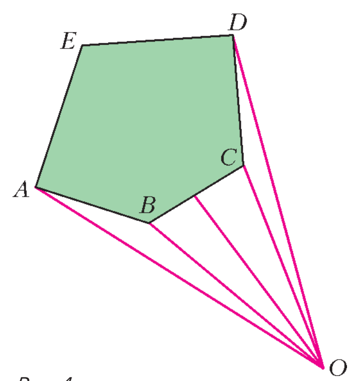

Рис.4

Последние три слагаемых поменяли знак при замене P на S, поскольку в них обход треугольников *совершается по часовой стрелке*.

Набросок доказательства формулы см. в конце статьи. А мы вернемся к задаче.

Предположим, что существует ломаная, удовлетворяющая всем условиям нашей задачи. Каждое звено ломаной разбито точкой пересечения на два равных отрезка. Каждый такой отрезок служит стороной одной из черных областей. Так как эти области – многоугольники, то каждую из них можно обойти против часовой стрелки. Тем самым мы зададим направление на каждом отрезке. Из условия, что в каждой точке самопересечения пересекаются ровно два звена, и правила раскраски областей следует, что два отрезка одного звена всегда противоположно направлены (рис.5).

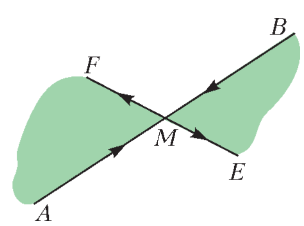

Рис.5

Выберем произвольную точку O, не лежащую ни на звеньях ломаной, ни на их продолжениях, и сосчитаем сумму ориентированных площадей

$$S = S_{OAM} + S_{OBM} + S_{OME} + S_{OMF} + \ldots$$

Если сгруппировать слагаемые по черным областям, то мы получим сумму ориентированных площадей этих областей. А так как все области обходятся против часовой стрелки, то все эти площади положительны, и сумма S тоже положительна. Сгруппируем теперь слагаемые в пары по звеньям. Ясно, что площади треугольников OAM и OBM равны ввиду равенства сторон AM и BM и совпадения опущенных на них высот треугольников. Но обходятся треугольники OAM и OBM *по-разному*: один против, а другой по часовой стрелке. Поэтому их ориентированные площади S_{OAM} и S_{OBM} *противоположны* и в сумме дают 0. Значит, и $S = 0$. Противоречие. Значит, искомой ломаной не существует.

Задача решена. Но в процессе ее передачи из уст в уста возникла еще одна задача. Частенько, формулируя, забывали про условие о пересечении *ровно двух* звеньев в каждой точке. Получалась такая задача:

На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно в одной точке. Может ли каждая точка самопересечения делить все пересекающиеся в ней звенья пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)

В общем-то, она легче исходной, но и ее решил только А.Лебедев, и то после решения исходной задачи.

Давайте посмотрим, насколько существенно мы использовали отброшенное условие.

Нетрудно заметить, что доказательство можно повторить дословно, если считать, что в каждой точке самопересечения пересекается четное число звеньев, даже если оно разное в разных точках. Сохраняется и черно-белая раскраска, и противоположная направление отрезков звеньев. А вот если допустить пересечение трех звеньев, то отрезки звеньев будут направлены в одну сторону (рис.6). Но мало того, что доказательство не проходит. У задачи и ответ противоположный!

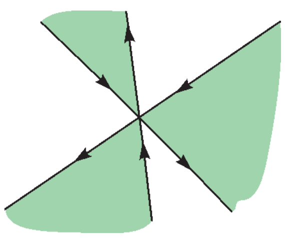

Рис.6

Оказывается, пример ломаной с таким условием есть (рис.7). Зная запрет, построить пример можно так. Во-первых, упростим задачу: будем строить *незамкнутую* ломаную. Идея в том, что если концы такой ломаной окажутся в неограниченной области, а точнее – в вершинах выпуклой оболочки ломаной, то из нескольких таких ломаных можно будет собрать и замкнутую ломаную. Во-вторых, начнем построение с *узкого места*. А именно, мы знаем, что в примере обязательно должно быть *нечетное число звеньев с общей серединой*. Для простоты начнем со всего лишь трех отрезков с общей серединой O. Повозившись, удается соединить два конца участком из двух звеньев, а из третьего конца провести через середины участков ломаную из двух звеньев так, чтобы свободный конец оказался вне ограниченных участков. Для трех других концов исходных отрезков поступим аналогично. Получилась ломаная из 11 звеньев. Размещая концы таких ломаных в последовательных вершинах шестиугольника, можно получить искомый пример замкнутой ломаной из 66 звеньев. Однако на рисунке приведен более экономный пример. В нем два экземпляра 11-звенной ломаной расположены центрально симметрично, а их концы соединены двумя дополнительными звеньями крест-накрест.

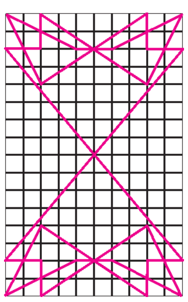

Рис.7

Можно было сэкономить еще 4 звена, отказавшись от симметрии при построении незамкнутой ломаной: тогда для оставшихся трех концов хватило бы трех дополнительных звеньев, и незамкнутая ломаная получилась бы 9-звенной, а замкнутая – 20-звенной! Кстати, остается открытым вопрос о *примере с минимальным числом звеньев*.

Напоследок давайте все-таки докажем лемму и формулу.

Лемма о раскраске: набросок доказательства. Назовем *особыми точками* вершины ломаной и ее точки самопересечения. Особые точки разбивают ломаную на отрезки, при этом *из любой особой точки выходит четное число отрезков*.

Выберем направление луча, не параллельное ни одному из звеньев ломаной. Цвет произвольной точки A, не лежащей на ломаной, будем определять так. Выпустим из A луч в выбранном нами направлении. Повернем плоскость, чтобы луч стал вертикальным.

Пусть луч не прошел через особую точку. Если луч пересек границу нечетное число раз, красим точку A в черный цвет, иначе в белый.

Пусть луч из точки A прошел через одну или несколько особых точек. Достаточно рассмотреть одну из них, для нескольких точек рассуждение такое же. Итак, M – особая точка на луче. Рассмотрим выходящие из M отрезки. Они не лежат на луче, и всего их четное число, поэтому одинаковы и четности числа отрезков справа и слева от луча. Сместим луч чуть вправо или чуть влево. Вне окрестности M число пересечений луча с границей не изменилось. А в окрестности M добавились пересечения со всеми выходящими из M вправо или влево отрезками. Однако четность числа пересечений при этом не изменилась. Согласно этой четности и покрасим A.

Теперь уже ясно, что двигая A внутри одной области, мы покрасим все ее точки в один цвет, а при переходе через границу цвет A сменится.

Формула ориентированной площади: набросок доказательства. Докажем сначала формулу для треугольника. Доказательство для случая, когда точка O лежит вне треугольника, ничем не отличается от рассмотренного выше доказательства для пятиугольника $ABCDE$. А в случае, если точка O лежит внутри треугольника ABC, этот треугольник разбивается на треугольники OAB, OBC, OCA, и его площадь равна сумме их площадей. А поскольку при этом указанное направление обхода этих треугольников такое же, как и направление обхода ABC, то совпадают и знаки при переходе к ориентированным площадям, т.е. равенство сохраняется.

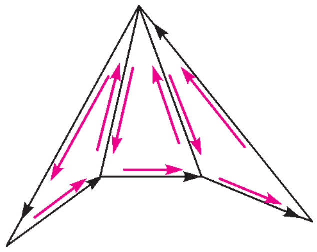

Рис.8

Разобьем теперь наш многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники (рис.8). Для каждого треугольника зафиксируем его обход в том же направлении, что и обход исходного многоугольника. Тогда ориентированная площадь многоугольника равна сумме ориентированных площадей треугольников. Зафиксируем точку O и запишем ориентированную площадь каждого треугольника по формуле как сумму трех слагаемых. Эти слагаемые соответствуют красным стрелкам на рисунке: по одному для каждой стороны многоугольника и по два для каждой проведенной диагонали. Нетрудно видеть, что стрелки соответствуют направлениям обхода треугольников, и что каждая диагональ проходится дважды в разных направлениях. Слагаемые, соответствующие одной диагонали, взаимно уничтожаются: $S_{OAB} + S_{OBA} = 0$, так как треугольник один и тот же, а направления обхода противоположны. Остается только сумма слагаемых, соответствующих сторонам. Но эти стороны в треугольниках проходятся в том же направлении, что и в многоугольнике, поэтому мы получаем в точности сумму из формулы.

Замечание. Мы использовали не слишком очевидный факт, что любой многоугольник (в том числе невыпуклый) можно непересекающимися диагоналями разбить на треугольники. На самом деле для доказательства разбиение именно диагоналями несущественно, подойдет любое разбиение на треугольники. Сначала проведем параллельные прямые через все вершины. Многоугольник разобьется на трапеции и треугольники. А теперь разобьем каждую трапецию диагональю на два треугольника.

Задачи для самостоятельного решения

1. (А.Шаповалов, Турнир им. Савина, 1999) Может ли замкнутая ломаная пересекать каждое свое звено ровно один раз, причем под прямым углом?

2. (А.Шаповалов, Московская устная олимпиада по геометрии, 2004) Существует ли в пространстве замкнутая самопересекающаяся ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз, причем в его середине?