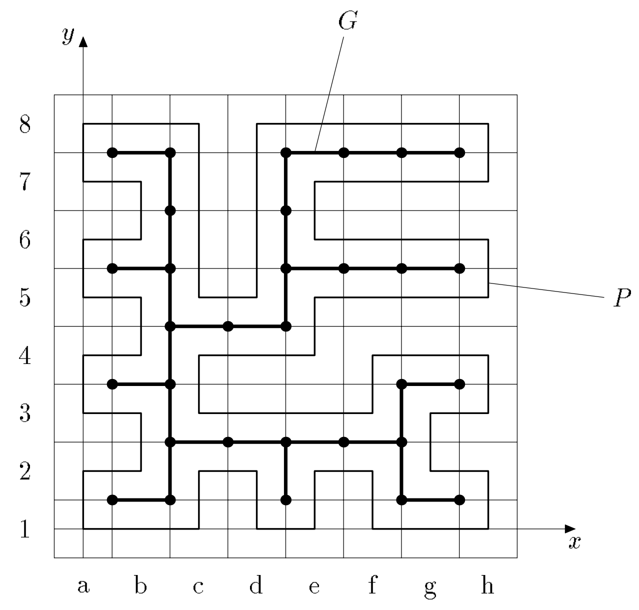
Задача Шаповалова о ладье

П. А. Кожевников

Достаточно доказать, что число, например, горизонтальных ходов ладьи при делении на 4 даёт в остатке 2.

Пусть траектория центра ладьи ограничивает многоугольник P (мы считаем, что центр ладьи всегда ставится точно в центр клетки). Та часть разметки шахматной доски на поля, которая находится целиком внутри P, образует некоторый граф G (см. рис.), вершины этого графа — узлы шахматной разметки. Нетрудно понять, что G — дерево. Введём систему координат с началом в центре поля a1 шахматной доски и осями, параллельными горизонталям и вертикалям доски. Тогда все вершины P имеют целочисленные координаты, а стороны параллельны осям. Установим следующий общий факт.

Лемма. *Пусть P — многоугольник с вершинами в целых точках со сторонами, параллельными осям, такой что соответствующий граф G (получаемый соединением центров соседних клеточек P: любой такой многоугольник можно вырезать из клетчатой бумаги) является деревом. Далее, пусть A — число целых точек на границе P, у которых абсцисса чётная, B — число целых точек на границе P, у которых абсцисса нечётная. Тогда сумма длин горизонтальных сторон P сравнима с $A - B + 2$ по модулю 4.*



Доказательство проведём индукцией по площади P. База ($S_P = 1$, P состоит из одной клетки) тривиальна. Переход осуществляем, отрезая от P клеточку, соответствующую листу дерева G (у всякого дерева, конечно же, есть лист). Клеточка может примыкать к P либо по горизонтальному отрезку, либо по вертикальному отрезку. В первом случае сумма длин горизонтальных сторон P не изменяется, в то же время $A-B$ тоже не изменяется. Во втором случае и сумма длин, и $A-B$ изменяются на 2.

Для многоугольника P, ограниченного траекторией центра ладьи, $A = 32$, $B = 32$, следовательно число горизонтальных ходов сравнимо с $A - B + 2 = 2$ по модулю 4.