Вписанные зацепления (Теория Рамсея для зацеплений)

М. Скопенков, О. Скрябин и А. Шаповалов

Комбинаторная геометрия. Стереометрия. Теория графов.

Решения задач внутри основного текста доступны школьникам до получения зачета, а решения задач из разделов "Основные задачи" выдаются после получения зачета.

Введение.

Первое занятие посвящено доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. (Теорема Конвея–Гордона–Закса, 1981) Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.

Последующие занятия посвящены ее обобщению на произвольные зацепления (определения и примеры даны ниже). Первые 4 занятия почти не используют друг друга, поэтому можно начинать решать как с пункта 1.1, так и с пунктов 2.1, 1'.1, 2'.1.

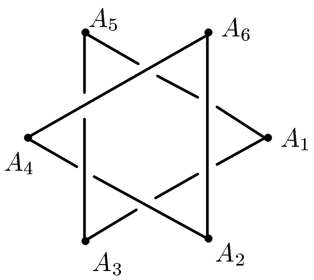
Зацепленные треугольники

1.1 В любой компании из 6-ти человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1.2 На плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то два отрезка с концами в этих точках пересекаются во внутренней точке.

Определение общего положения. Будем говорить, что набор точек в пространстве находится *в общем положении*, если никакие 4 точки из этого набора не лежат в одной плоскости.

Пример 1. (Рис. 1) Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, расположенных в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соотвественно, находится в общем положении.



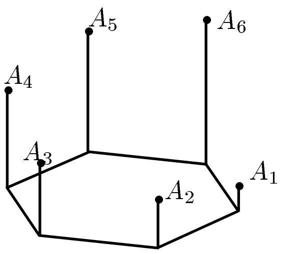


Рис. 1.

Пример 2. Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении (предлагаем проверить это самостоятельно).

Определение коэффициента зацепления треугольников. Пусть Δ, Δ' — два треугольника в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении. Будем говорить, что эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке. *Коэффициентом зацепления* этих треугольников назовем число

$$\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 1, \text{ если } \Delta \text{ и } \Delta' \text{ зацеплены}, \qquad \mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0, \text{ — иначе.}$$

Пример 3. Треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ из примера 1 зацеплены.

1.3 Если контур одного из треугольников Δ и Δ' не пересекается с плоскостью, в которой лежит другой треугольник, то $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = 0$.

Определение зацепленных пар точек. Пусть на горизонтальной прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная), считая справа.

1.4 Треугольники Δ и Δ' зацеплены $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия:

1) плоскости треугольников Δ и Δ' пересекаются по некоторой прямой l;

2) каждое из множеств $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек (здесь и далее Δ и Δ' обозначают контуры треугольников);

3) пары точек $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ зацеплены на прямой l.

1.5 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta', \Delta)$.

1.6 $\mathrm{lk}(\Delta, \Delta') = \mathrm{const}$, если вершины треугольников Δ и Δ' движутся в пространстве, оставаясь в общем положении.

1.7 Пусть точка A_1 из примера 1 движется вверх с постоянной скоростью. Постройте график зависимости $\mathrm{lk}(A_1A_3A_5, A_2A_4A_6)$ от времени.

Определение зацепленности шестерки точек. Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разделенной парой* два треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. *Зацепленностью* данной шестерки точек назовем количество зацепленных разделенных пар.

Замечание. Зацепленность шестерки точек равна

$$\sum \mathrm{lk}(\Delta, \Delta'),$$

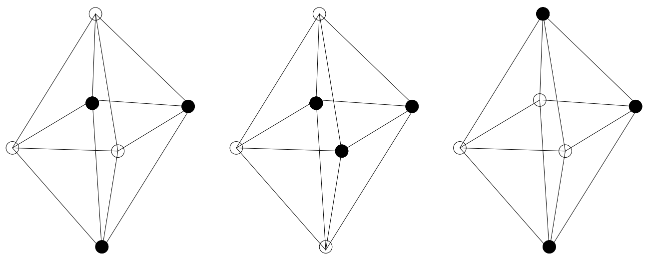
где сумма берется по всем разделенным парам (Δ, Δ').

Тестовые вопросы.

Вопрос 1. Рассмотрим правильный треугольник ABC, лежащий на горизонтальной плоскости. Повернем его на угол ϕ вокруг центра и поднимем над плоскостью. Обозначим $A'B'C'$ полученный треугольник (плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны). При каких значениях ϕ шесть точек A, B, C, A', B' и C' находятся в общем положении?

a) при любых ϕ;
b) при любых ϕ, кроме $\phi = 2\pi k/3$, где k — целое;
c) при любых ϕ, кроме $\phi = \pi k/3$, где k — целое;
d) ни при каких ϕ.

Вопрос 2. Требуется так покрасить три вершины октаэдра в белый цвет, а три другие — в черный, чтобы после небольшого "шевеления" этих вершин можно было добиться того, чтобы треугольник с вершинами в белых точках был зацеплен с треугольником с вершинами в черных точках. Выберите все способы раскраски вершин на рис. A a), b), c), которые удовлетворяют данному условию.



a b c

Рис. A.

Вопрос 3. Сколько существует зацепленных разделенных пар для 6-ки точек из примера 1?
a) 0; b) 1; c) 2.

Основные задачи.

1.8 Докажите, что четность зацепленности не зависит от выбора шестерки точек.

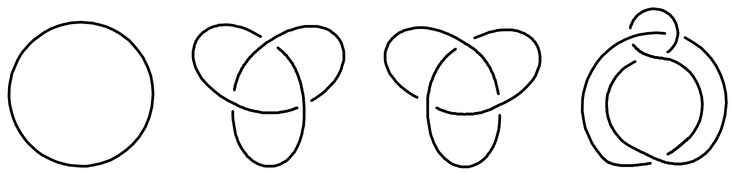
1.9 Приведите пример шестерки точек, зацепленность которой равна 1.

1.10 Докажите теорему 1.

Вписанные узлы и зацепления

Основные понятия. *Узел* можно представлять себе как веревку, концы которой соединены. Веревку будем считать эластичной, и узлы, получающиеся друг из друга деформацией веревки, различать не будем.

Примеры *различных* узлов: тривиальный K, правый и левый трилистники T, восьмерка E (рис. 2).

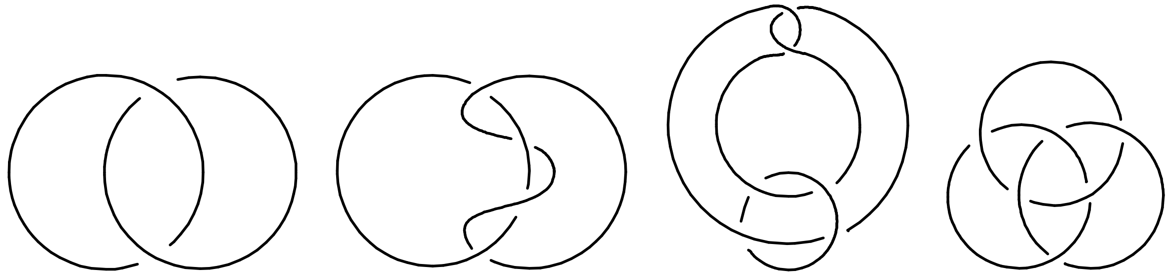


K Тп Тл E

Рис. 2.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление*.

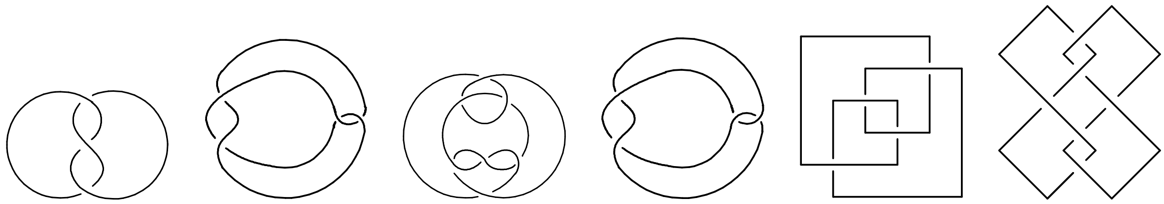
Примеры *различных* зацеплений: зацепление Хопфа H (или простое зацепление), двойное зацепление D, зацепление Уайтхеда W, кольца Борромео B (рис. 3).



H D W B

Рис. 3.

2.1 В какие из узлов и зацеплений, изображенных на рис. 2 и 3, можно продеформировать узлы и зацепления на рис. 4?



а б в г д е

Рис. 4.

Определение вписанного узла и зацепления. Пусть в пространстве дано некоторое множество точек и узел. Если веревку продеформировать в ломаную, все вершины которой принадлежат данному множеству, то получится узел, *вписанный* в данное множество точек. (При этом часть точек множества может остаться незадействованной). Будем говорить также, что полученная ломаная *представляет* данный узел. Аналогично определяется *вписанное* зацепление.

Замечание. Если каждую точку множества соединить прямолинейным отрезком с каждой из остальных точек, то вписанный узел является подмножеством полученной фигуры.

Теорема 2. (Теорема Негами, 1991) Для любого узла найдется число N такое, что в любое множество N точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел.

(Попробуйте доказать эту теорему для трилистника. Указания, а также связанные с этой теоремой открытые вопросы будут даны в последующих частях данного цикла задач.)

Тестовые вопросы.

Вопрос 1. Каково минимальное число точек в наборе, в который можно вписать простое зацепление?
a) 6; b) 8; c) 9; d) 10; e) 12; f) бесконечно много.

Вопрос 2. Каково минимальное число точек в наборе, в который можно вписать кольца Борромео?
a) 6; b) 8; c) 9; d) 10; e) 12; f) бесконечно много.

Вопрос 3. Какой узел представляет ломаная, вписанная в множество из 5 точек, проекция которой изображена на Рис. B?
a) К; b) Тп; c) Тл ; d) E; e) такой ломаной не существует.

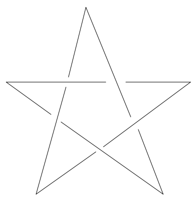


Рис. B.

Вопрос 4. Найдите коэффициенты зацепления двух треугольников, представляющих простое зацепление (см. определение в занятии "Зацепленные треугольники").
a) 0; b) 1; c) зависит от конкретного способа представления.

Вопрос 5. Найдите коэффициенты зацепления двух из трех треугольников, представляющих кольца Борромео (см. определение в занятии "Зацепленные треугольники").
a) 0; b) 1; c) зависит от конкретного способа представления.

Основные задачи.

2.2 Докажите, что всякий узел, вписанный в набор из ≤ 5 точек, тривиален.

2.3 Каково минимальное число точек в наборе, в который можно вписать: а) простое зацепление; б) кольца Борромео; в) трилистник; г) двойное зацепление; д) восьмерку; е) зацепление Уайтхеда?
(Доказательства минимальности мы не требуем).

2.4 Найдите коэффициенты зацепления (см. определение в занятии "Зацепленные треугольники"):

а) двух треугольников, представляющих простое зацепление;

б) двух из трех треугольников, представляющих кольца Борромео.

2.5 Пусть даны два треугольника в пространстве. Предположим, что проекции никаких 3 из их 6 вершин на некоторую плоскость не лежат на одной прямой. Будем считать рассматриваемую плоскость расположенной горизонтально. Изобразим на рисунке проекции треугольников и в каждой точке пересечения проекций (*перекрестке*) укажем, сторона какого треугольника проходит выше (рис. 1). Докажите, что коэффициент зацепления равен четности числа перекрестков, в которых сторона первого треугольника проходит выше стороны второго.

Зацепленные четырехзвенные ломаные*

Теорема 1'. (Теорема Закса, 1981) Пусть в пространстве даны 4 красные и 4 синие точки, причем никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек. Тогда найдутся две зацепленные замкнутые четырехзвенные ломаные с вершинами в этих точках, звенья которых соединяют точки разных цветов.

1'.1 На плоскости даны три синие и три красные точки, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два отрезка с разноцветными концами, пересекающиеся во внутренней точке.

Определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных. Пусть $\square$ и $\square'$ — две замкнутые четырехзвенные ломаные в пространстве, с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно, находящимися в общем положении. Их *коэффициентом зацепления* назовем остаток при делении на 2 количества точек пересечения контура $ABCD$ с объединением треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$.

1'.2 Докажите, что $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A')$.

1'.3 Докажите свойства коэффициента зацепления замкнутых четырехзвенных ломаных, аналогичные 1.5, 1.6.

1'.4 Дайте определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных в случае, когда требование общего положения заменено более слабым требованием $\square \cap \square' = \emptyset$ так, чтобы сохранились предыдущие свойства.

Определение общего положения в случае двух цветов. Набор точек в пространстве, окрашенных в два цвета, называется набором *общего положения*, если никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек.

Определение разделенной пары четырехзвенных ломаных. Пусть в пространстве дан набор 4-х красных и 4-х синих точек общего положения. Назовем *разделенной парой* две замкнутые четырехзвенные ломаные со следующими свойствами: (1) их вершины расположены в данных точках; (2) они не имеют общих вершин; (3) их звенья соединяют точки разных цветов.

Тестовые вопросы.

Вопрос 1. Имеется набор точек, в котором хотя бы 3 синие и хотя бы 3 красные точки. Пусть все синие точки лежат на прямой a, а все красные — на прямой b. При каких условиях данный набор будет набором общего положения?

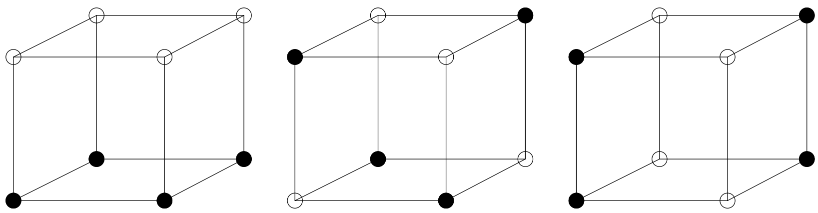
a) никогда;

b) прямые a и b скрещиваются;

c) прямые a и b не параллельны;

d) всегда.

Вопрос 2. Требуется покрасить четыре вершины куба в белый цвет, а четыре другие — в черный так, чтобы после небольшого "шевеления" этих вершин можно было выбрать замкнутую четырехзвенную ломаную с вершинами в белых точках и замкнутую четырехзвенную ломаную с вершинами в черных точках, зацепленную с ней. Выберите все способы раскраски вершин на рис. C, a), b), c), которые удовлетворяют данному условию.



a b c

Рис. C.

Вопрос 3. Найдите коэффициент зацепления двух четырехзвенных ломаных, представляющих двойное зацепление (рис. D, необходимые определения даны в занятиях "Зацепленные треугольники" и "Вписанные узлы и зацепления").

a) 0; b) 1; c) 2; d) зависит от способа представления.

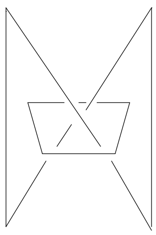


Рис. D.

Основные задачи.

1'.5 Пусть 4 красные точки лежат на одной прямой, а 4 синие — на другой прямой, скрещивающейся с ней. Найдите в этом случае все разделенные пары $(\square, \square')$, для которых $\square$ и $\square'$ зацеплены.

1'.6 Дайте определение зацепленности для четверки синих и четверки красных точек и докажите, что она четна.

1'.7 Докажите теорему 1'.

1'.8 Докажите, что в предположениях теоремы 1' найдутся хотя бы две пары зацепленных замкнутых четырехзвенных ломаных.

Доказательство теоремы Негами для трилистника.

(Решения последующих задач не используют результатов предыдущих пунктов)

Определение узла (зацепления), вписанного в раскрашенное множество. Пусть в пространстве дано множество точек, окрашенных в два цвета. Тогда под *вписанным узлом* будем понимать ломаную, представляющую данный узел, звенья которой соединяют точки разных цветов. *Вписанное зацепление* определяется аналогично (см., например, теорему 1').

Теорема 2'. (Теорема Миёчи, 1994) Для любого узла (зацепления) найдется число N такое, что в любое множество N синих и N красных точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел (зацепление).

(Очевидно, теорема Негами следует из теоремы Миёчи).

Определение положительного набора. Пусть в пространстве дан набор N синих и N красных точек, находящийся в общем положении (смотри определение выше). Проведем все отрезки, соединяющие точки разного цвета. Зафиксируем некоторую плоскость, которую будем считать расположенной горизонтально. Нарисуем на ней проекцию полученной фигуры. В дальнейшем нас будет интересовать только эта плоская картинка, и мы будем говорить 'точка набора' и 'отрезок', подразумевая соответственно 'проекция точки набора' и 'проекция проведенного нами отрезка'.

Пусть точки набора не попадают внутрь отрезков. В каждой точке пересечения отрезков (*перекрестке*) укажем, какой из отрезков проходит выше (как в задаче 2.5). Назовем перекресток *положительным* (рис. 1' слева), если при движении по отрезку, который проходит выше, от синего конца к красному синий конец другого отрезка остается слева. Иначе перекресток назовем *отрицательным* (рис. 1' справа).

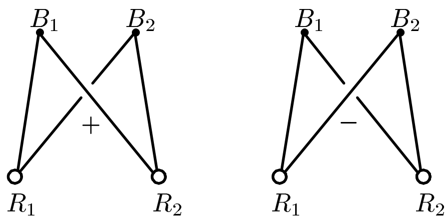


Рис. 1'.

Исходный набор точек назовем *положительным*, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 одна из пар отрезков B_1R_1, B_2R_2 и B_1R_2, B_2R_1 пересекается во внутренней точке, причем полученный перекресток положителен. Аналогично определяется *отрицательный* набор.

Пример 1'. Пример положительного набора изображен на рис. 2' (сравни с задачей 1'.5).

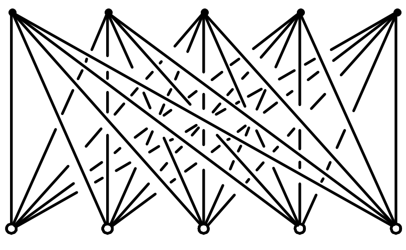


Рис. 2'.

2'.1 Раскрасьте точки из примера 1 в два цвета так, чтобы получился отрицательный набор.

В задачах 2'.2–2'.5 предполагается, что дан некоторый положительный набор, причем $N \geq 2$.

2'.2 Все синие точки лежат по одну сторону от любой прямой, соединяющей две красные точки.

Определение порядка '>'. Пусть дан положительный набор. Пусть R_1 и R_2 — две красные точки. Скажем, что $R_1 > R_2$, если при движении по прямой R_1R_2 от R_1 к R_2 все синие точки остаются справа.

2'.3 Если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

2'.4 Если отрезок R_1B_1 проходит выше R_2B_2, то $R_1 > R_2$.

2'.5 Красные и синие точки можно занумеровать так, что при любых $i < j$ и $k \neq l$ отрезок R_iB_k проходит выше R_jB_l.

Тестовые вопросы.

Вопрос 1. Каково минимальное число точек в ракрашенном в 2 цвета множестве, в которое можно вписать простое зацепление?

a) 6; b) 8; c) 9; d) 10; e) 12; f) бесконечно много.

Вопрос 2. Если в положительном наборе изменить цвет каждой точки на противоположный, то набор станет:

a) положительным; b) отрицательным; c) ни положительным, ни отрицательным.

Вопрос 3. Положительный набор при отражении относительно любой вертикальной плоскости:

a) положительным; b) отрицательным; c) ни положительным, ни отрицательным.

Вопрос 4. Положительный набор при отражении относительно любой горизонтальной плоскости:

a) положительным; b) отрицательным; c) ни положительным, ни отрицательным.

Вопрос 5. При неограниченном движении вертикально вверх наибольшей красной точки (относительно введенного порядка '>') положительного набора

a) он все время остается положительным;

b) он через некоторое время становится отрицательным;

c) он через некоторое время становится ни положительным, ни отрицательным.

Основные задачи.

2'.6 Впишите трилистник в набор точек из примера 1'.

2'.7 В любой положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно вписать трилистник.

2'.8 (Теоремы Рамсея) а) Докажите, что для любых m и n найдется такое $R(m, n)$, что при любой раскраске ребер полного графа с $R(m, n)$ вершинами в два цвета найдется либо полный подграф первого цвета с m вершинами, либо полный подграф второго цвета с n вершинами.

б) Сформулируйте и докажите обобщение пункта а) на случай трех цветов.

в) Сформулируйте и докажите обобщение пунктов а) и б) на полные двудольные графы.

г) Назовем набор точек общего положения в пространстве, окрашенных в два цвета, *нейтральным*, если проекции на плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках). Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек.

д) Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный набор n синих и n красных точек.

2'.9 Докажите теоремы Миёчи и Негами для трилистника.

2'.10 Впишите узлы и зацепления, изображенные на рисунках 2 и 3, в какие-нибудь положительные наборы точек и докажите для них теоремы Миёчи и Негами.

Доказательство теоремы Негами*.

Лемма о двух спицах. Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Для любого узла найдется такое N, что данный узел можно вписать в множество, состоящее из N красных точек на первой прямой и N синих точек на второй прямой.

(Иными словами, любой узел можно натянуть на две спицы.)

Определение прямоугольного представления узла. (Рис. 3' слева, рис. 2д) Будем говорить, что задано *прямоугольное представление* узла, если проекция веревки на плоскость обладает следующими свойствами:

⊏) проекция состоит из некоторого числа вертикальных и горизонтальных отрезков;

−) никакие два вертикальных отрезка не лежат на одной вертикальной прямой и никакие два горизонтальных отрезка не лежат на одной горизонтальной прямой;

÷) если вертикальный и горизонтальный отрезок пересекаются, то "горизонтальная" часть веревки проходит выше "вертикальной".

Определение *прямоугольного представления* зацепления аналогично.

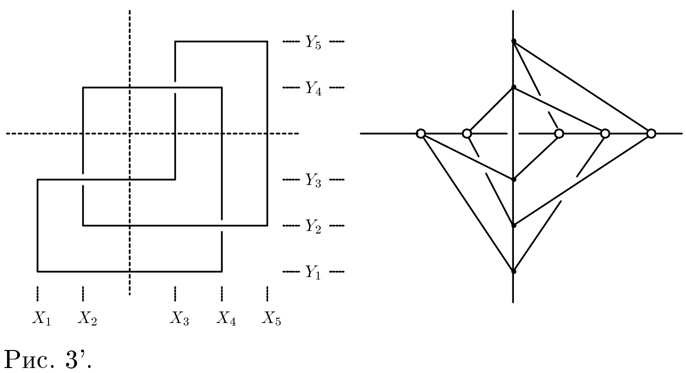


Рис. 3'.

Определение двойственного узла. (Рис. 3') Пусть дано прямоугольное представление некоторого узла. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — "координаты" вертикальных, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ — "координаты" горизонтальных отрезков его проекции (рис. 3'). Рассмотрим две прямые, параллельные плоскости рисунка, одна из которых расположена под этой плоскостью и проходит горизонтально, а вторая расположена над этой плоскостью и проходит вертикально. Отметим на горизонтальной прямой точки с координатами $X_1, X_2, \ldots, X_N$, а на вертикальной — точки с координатами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$. Обозначим через R_i точку на первой прямой с координатой X_i, а через B_j — точку на второй прямой с координатой Y_j. Соединим отрезками все пары отмеченных точек R_i, B_j, для которых точка (X_i, Y_j) на плоскости рисунка является концом некоторого отрезка проекции узла. В результате получим некоторую замкнутую ломаную. Узел, который представдяется этой ломаной, назовем узлом, *двойственным* к исходному. Определение *двойственного зацепления* аналогично.

Пример 2'. На рис. 3' изображены трилистник и двойственный к нему узел (трилистник).

Тестовые вопросы.

Вопрос 1. Является ли диаграмма на рис. 4 прямоугольным представлением узла?

a) да; b) нет.

Вопрос 2. Каково минимальное число отрезков в прямоугольном представлении простого зацепления?

a) 6; b) 8; c) 9; d) 10; e) 12.

Вопрос 3. Набор N красных точек $R_1, R_2, \ldots, R_N$ и M синих точек $B_1, B_2, \ldots, B_M$ из определения двойственного узла является положительным, если и только если:

a) все числа $X_1, X_2, \ldots, X_N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ положительны;

b) все числа $X_1, X_2, \ldots, X_N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ отрицательны;

c) все числа $X_1, X_2, \ldots, X_N, Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ одного знака;

d) числа $X_1, X_2, \ldots, X_N$ имеют один и тот же знак, а числа $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ имеют противоположный знак.

Основные задачи.

2'.11 Постройте прямоугольные представления узлов и зацеплений с рис. 2 и 3.

2'.12 Нарисуйте двойственные узлы и зацепления для построенных Вами в задаче 2'.11 прямоугольных узлов и зацеплений. Что это за узлы?

2'.13 а) Докажите, что для любого узла существует прямоугольное представление.

б) Докажите, что любой узел можно продеформировать в двойственный к нему.

2'.14 Докажите лемму о двух спицах.

2'.15 Выведите из леммы о двух спицах теоремы Миёчи и Негами.

Дополнительные задачи.

2'.16 (трудная) Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве найдется пара зацепленных циклов.

2'.17 (известная открытая проблема) Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве некоторый цикл оказывается заузленным.

Правильные ответы на тестовые вопросы.

К занятию "Зацепленные треугольники": 1c, 2bc, 3b.

К занятию "Вписанные узлы и зацепления": 1a, 2c, 3e, 4b, 5a.

К занятию "Зацепленные четырехзвенные ломаные": 1b, 2bc, 3a.

К занятию "Доказательство теоремы Негами для трилистника": 1b, 2a, 3b, 4b, 5a.

К занятию "Доказательство теоремы Негами": 1a, 2b, 3c.

Решения задач.

1.1 Рассмотрим граф, состоящий из шести вершин и всех ребер, соединяющих их. Каждому человеку сопоставим вершину этого графа. Если двое людей знакомы, то ребро, соединяющее соответствующие им вершины, покрасим в красный цвет, иначе — в синий цвет. Рассмотрим некоторую вершину A. По принципу Дирихле найдутся три вершины X_1, X_2 и X_3 такие, что ребра AX_1, AX_2, AX_3 одного цвета. Для определенности считаем, что это — красный цвет. Если какое-то из ребер X_iX_j $(i,\ j \in \{1;2;3\})$ красного цвета, то все стороны треугольника AX_iX_j имеют красный цвет, и тем самым задача решена. В противном случае все стороны треугольника $X_1X_2X_3$ имеют синий цвет. И в этом случае задача тоже решена.

1.2 *Первое решение.* Если выпуклая оболочка рассматриваемых точек четырех- или пятиугольник, то утверждение задачи очевидно: пересекутся две диагонали. Рассмотрим случай, когда выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Две оставшиеся точки D и E из данных пяти лежат внутри треугольника ABC. E лежит внутри одного из треугольников DAB, DAC или DBC — допустим, в DAC. Тогда EB пересекается с одним из отрезков DA или DC.

Второе решение. Утверждение этой задачи является двумерным аналогом теоремы 1 и может быть доказано аналогичным образом. Набор точек на плоскости назовем набором *общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем *зацепленностью* пятерки точек общего положения число пар отрезков с концами в этих точках, пересекающихся во внутренней точке. Легко привести пример пятерки, зацепленность которой равна 1. После этого для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что четность зацепленности не зависит от выбора 5 точек. Пусть даны две пятерки. Одну из них можно перевести в другую, по очереди двигая точки (причем движение можно считать равномерным). Пока точки движутся так, что пятерка остается в общем положении, зацепленность, очевидно, не меняется. Как только одна из точек (скажем, A) попадает на отрезок с концами в двух других точках (скажем, B и C), зацепленность либо не меняется, либо меняется на ± 2. Действительно, в такой момент меняется "состояние " (т. е. пересекающиеся отрезки становятся непересекающимися, и наоборот) ровно двух пар отрезков: AD, BC и AE, BC (где D и E две оставшиеся точки пятерки).

1.3 Достаточно доказать, что если $lk(\Delta, \Delta') = 1$ или $lk(\Delta', \Delta) = 1$, то контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Первый случай очевиден. Во втором случае контур треугольника Δ' пересекает внутренность треугольника Δ. Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Однако в таком случае и контур треугольника Δ персекает плоскость треугольника Δ'.

1.4 Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ'. Тогда выполнение условия 1) очевидно. Выполнение условия 2) следует из задачи 1.3. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ', то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки. Докажем теперь выполнение условия 3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и B, а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B'. Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l.

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l. Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ'.

1.5 Каждое из условий $lk(\Delta, \Delta') = 1$ и $lk(\Delta', \Delta) = 1$ в соответствии с утверждением задачи 1.4 равносильно одному и тому же условию.

1.6 Из задачи 1.4 следует, что $lk(\Delta, \Delta') = 1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)-3). Никакое из этих условий не может нарушиться при допустимом движении. В проверке нуждается только сохранение условия 1), которое может нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но тогда из задачи 1.3 следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него $lk(\Delta, \Delta') = 0$.

1.7 *Указание.*При построении графика может оказаться полезной следующая лемма:

Лемма Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t, где $0 \le t \le 2$. Предположим, что набор 6 вершин треугольников Δ_t и Δ' находится в общем положении при всех t, кроме $t = 1$.

а) Если $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, то $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta') = \mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$.

б) Если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то числа $\mathrm{lk}(\Delta_0, \Delta')$ и $\mathrm{lk}(\Delta_2, \Delta')$ отличаются на 1.

Решение. Зависимость коэффициента зацепления от времени выглядит следующим образом:

$$lk(t) = 1, t \in (-\infty; 2) \cup (3,5; 4,5) \cup (6; +\infty); \qquad lk(t) = 0, t \in (2; 3,5) \cup (4,5; 6).$$

Вид этой зависимости следует из примера 3 и леммы, сформулированной выше. Сама лемма легко следует, например, из задачи 1.4.

1.8 Пусть наборы точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5, а также N', X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 находятся в общем положении. Соединим точки N и N' ломаной, не проходящей через отрезки X_iX_j. Будем равномерно двигать точку N вдоль этой ломаной, через N_t обозначим ее полжение в момент времени t. В соответствии с леммой из указания к задаче 1.7 зацепленность шестерки точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 может изменится лишь в те моменты времени, когда $N_t \in X_iX_jX_k$ для некоторых $1 \le i < j < k \le 5$. Поэтому достаточно доказать, что при прохождении точки N через плоскость $X_iX_jX_k$, четность зацепленности нашей шестерки не меняется (считаем, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$). Среди всех возможных отрезков с концами в точках N, X_i, X_j, X_k или вообще нет двух пересекающихся отрезков, или имеется только одна пара пересекающихся отрезков. В первом случае контуры любых двух пар треугольников с концами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 не пересекаются; в соответствии с указанной леммой зацепленность шестерки точек измениться не может. Рассмотрим второй случай. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такая перестановка точек N, X_1, X_2, X_3, что отрезок A_1A_2 пересекается с отрезком A_3A_4. Существуют две пары треугольников с концами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5, контуры которых пересекаются: $X_4A_1A_2$ и $X_5A_3A_4$, $X_5A_1A_2$ и $X_4A_3A_4$. Из нашей леммы следует, что коэффициент зацепления каждой из этих пар треугольников поменяется, а коэффициент зацепления остальных пар треугольников останется неизменным. Утверждение задачи доказано.

1.9 Подходит набор точек из примера 1. Другой пример можно получить, чуть пошевелив набор точек из решения задачи 2.3.а.

1.10 Утверждение задачи следует из двух предыдущих задач.

2.1 *Указание.* Самый правильный способ решить эту задачу — это взять веревку, завязать на ней узел с рис. 4 и попытаться продеформировать его в один из узлов на рис. 2, 3. То же относится к зацеплениям. Деформацию веревки удобно изображать на бумаге в виде серии картинок, в которой соседние картинки получаются друг из друга небольшой деформацией и отличаются мало.

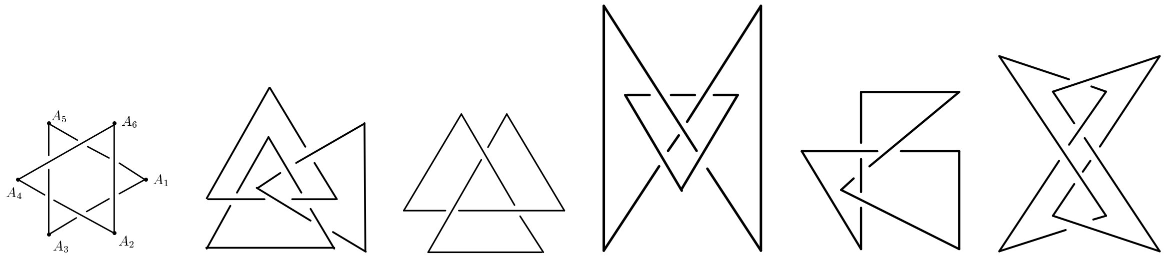
Ответ: а), б) правый трилистник; в) восьмерка; г) тривиальный узел; д) восьмерка; е)зацепление Уайтхеда.

2.2 Достаточно показать, что замкнутая ломаная с ≤ 5 звеньями незаузлена (то есть представляет тривиальный узел). Ясно, что треугольник незаузлен. Ясно, что если в n-угольнике (то есть n-звенной замкнутой ломаной) натянутый на пару соседних звеньев треугольник не пересечен никаким другим звеном, то эту пару звеньев можно стянуть по диагонали, то есть получить представление того же узла $(n-1)$-угольником. Поскольку в 4-угольнике препятствий для стягивания нет, то он стягивается в треугольник, и, значит, незаузлен. Пусть в 5-угольнике $ABCDE$ есть препятствие для стягивания пары звеньев AB и BC. Тогда звено DE пересекает треугольник ABC. Но тогда звено AE не пересекает треугольник BCD, так как они лежат по разные стороны от плоскости ABC.

2.3 *Ответы:* а) 6; б) 9; в) 6; г) 7; е) 8.

Примеры. Пример к пункту а) изображен на рисунке 1. Другой пример: правильный треугольник ABC в горизонтальной плоскости, второй треугольник DEF с вершиной F, лежащей вне треугольника ABC в его плоскости, и вершинами D и E, расположенными соответственно в точности над и под центром треугольника ABC.

На рисунках приведены проекции узлов и зацеплений, вписанных в наименьший набор точек. Для каждой проекции нужно еще проверить, что она реализуема, т. е. действительно существует конфигурация в пространстве, которая проецируется в данную картинку.



а б в г д е

Рис. 4'.

Минимальность. В пунктах а) и б) — очевидна. В пункте в) следует из задачи 2.2. Докажем минимальность набора в пункте г). Для этого достаточно показать, что любая пара треугольников в пространстве либо представляет простое зацепление, либо их можно расцепить. Если контур одного из треугольников не пересекает внутренность другого, то препятствий для расцепления нет. Иначе каждый из контуров треугольников должен пересекать внутренность другого в единственной точке. Рассмотрим плоскость одного из треугольников (скажем, ABC). Будем считать ее горизонтальной. Пусть сторона DE треугольника пересекает треугольник ABC, а F — ето третья вершина. Двигая F вертикально (и вместе с ней — стороны FD и FE), мы можем поместить ее на горизонтальную плоскость. После этого мы можем подвинуть вершины D и E (вместе с соответствующими сторонами) и получить описанный выше пример к пункту а).

В пункте д) авторы задачи не умеют доказывать минимальность.

2.4 а) Ответ: 1; следует из примера 3. б) Ответ: 0.

2.5 *Ответ:* коэффициент зацепления равен четности числа перекрестков, в которых первый треугольник проходит выше второго.

Это утверждение может оказаться полезным при решении задач из первой части.

Решение Д.Коробицына. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат выше горизонтальной плоскости. Пусть $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC на плоскость. Рассмотрим простой многогранник τ, ограниченный многоугольниками ABC, $A'B'C'$, $ABA'B'$, $BCB'C'$ и $CAC'A'$.

Коэффициент зацепления треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равен числу L (здесь и в дальнейшем все равенства понимаются по модулю 2) точек пересечения контура треугольника ABC с внутренностью треугольника $A_1B_1C_1$. Пусть U — число точек пересечения контура треугольника ABC с боковыми гранями многогранника τ. Число точек пересечения контура с многогранником четно. Поэтому $L + U = 0 \Rightarrow L = U \Rightarrow L =$ числу точек пересечения контуров проекций треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых сторона треугольника $A_1B_1C_1$ проходит ниже стороны треугольника ABC.

1'.1 *Первое решение.* Допустим, утверждение задачи неверно. Синие точки обозначим C_1, C_2 и C_3, а красные — K_1, K_2 и K_3. Тогда стороны четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$ не пересекаютсю во внутренних точках. Отрезок C_3K_3 не пересекается с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому точки C_3 и K_3 или обе лежат внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$ вне его.

В первом случае точка C_3 лежит внутри одного из четырехугольников $C_1K_1C_2K_3$ или $C_1K_2C_2K_3$. Если, например, точка C_3 лежит внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_3$, то отрезок C_3K_2 пересекает контур четырехугольника $C_1K_2C_2K_3$, что приводит нас к противоречию. Во втором подслучае противоречие получаем аналогичным способом.

Второй случай. Отрезки K_3C_1 и K_3C_2 не пересекаются с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому или точка K_2 лежит внутри четырехугольника $K_1C_1K_3C_2$, или точка K_1 лежит внутри четырехугольника $K_2C_1K_3C_2$. Задача свелась к первому случаю.

Другое решение этой задачи почти дословно повторяет рассуждение из второго решения задачи 1.2

1'.2 Пусть τ — число точек пересечения контура $ABCD$ с гранями тетраэдра $A'B'C'D'$. Тетраэдр $A'B'C'D'$ делит пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. Так как точки A, B, C, D, A', B', C', D' находятся в общем положении, то число τ четно. Так как

$$\tau \equiv \operatorname{lk}(ABCD, A'B'C'D') + \operatorname{lk}(ABCD, B'C'D'A') \pmod 2,$$

то

$$\operatorname{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \operatorname{lk}(ABCD, B'C'D'A').$$

1'.3 Заметим, что $\operatorname{lk}(ABCD, A'B'C'D') \equiv \operatorname{lk}(ABC, A'B'C') + \operatorname{lk}(ABC, A'D'C') + \operatorname{lk}(ADC, A'B'C') + \operatorname{lk}(ADC, A'D'C')$ (mod 2). Из этого, а также свойств 1.5–1.6 следуют такие утверждения:

1. $\operatorname{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \operatorname{lk}(A'B'C'D', ABCD)$.

2. При непрерывном движении точек A, B, C, D, A', B', C', D', оставляющем их в каждый момент в общем положении, число $\operatorname{lk}(ABCD, A'B'C'D')$ остается постоянным.

1'.4 Пусть даны две замкнутые четырехзвенные ломаные $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые не имеют общих точек.

Первый способ. Пошевелим немного вершины этих ломаных таким образом, чтобы новый набор вершин — A', B', C', D', A_1', B_1', C_1', D_1' находился в общем положении. Положим по определению

$$\mathrm{lk}(ABCD, A_1B_1C_1D_1) = \mathrm{lk}(A'B'C'D', A_1'B_1'C_1'D_1').$$

Второй способ. Пусть α — полуплоскость, в которой лежит треугольник $A_1B_1C_1$, ограниченная прямой A_1C_1. А β — полуплоскость, в которой лежит треугольник $A_1D_1C_1$, ограниченная прямой A_1C_1. Объединение этих полуплоскостей делит пространство на две части. Каждой точки прерсечения контура $ABCD$ с контурами или внутренностями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ поставим в соответствие 0, если существует такая окрестность этой точки, прересечение которой с контуром $ABCD$ лежит в одной части пространства. В противном случае поставим в соответствие этой точке 1. Коэффициентом зацепления четырехзвенных ломаных $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называется сумма всех этих чисел по модулю 2.

1'.5 Указанные ломаные будут зацеплены тогда и только тогда, когда пары их вершин на каждой из скрещивающихся прямых будут зацеплены. Поэтому количество зацепленных разделенных пар четырехзвенных ломаных равно 2.

1'.6 Пусть даны четыре синие и четыре красные точки, находящиися в общем положении. Их зацепленностью называется количество зацепленных разделеных пар с вершинами в этих точках.

Пусть B, B', B_1, B_2, B_3 — синие точки, а R_1, R_2, R_3, R_4 — красные точки, причем наборы точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4, а также B', B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 находятся в общем положении.

Соединим точки B и B' ломаной так, чтобы никакое ее звено не лежало ни в одной из плоскостей $R_iR_JB_k$. При движении точки B по ломаной зацепленность набора точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 может изменится лишь в те моменты, когда отрезок BR_i пересекается с отрезком B_kR_j $(i \neq j)$. Пусть, например, отрезок BR_2 пересекается с отрезком B_1R_1. Среди всех разделенных пар ломаных с вершинами в нашем наборе точек коэффициент зацепления изменится у следующих: $BR_2B_2R_3$ и $B_1R_1B_3R_4$, $BR_2B_2R_4$ и $B_1R_1B_3R_3$, $BR_2B_3R_3$ и $B_1R_1B_2R_4$, $BR_2B_3R_4$ и $B_1R_1B_2R_3$. Поэтому четность зацепленности при этом не изменится.

Из приведенного рассуждения ясно, что у любых двух наборов из четырех синих и четырех красных точек зацепленность имеет одинаковую четность. Тогда из предыдущей задачи следует, что зацепленность всегда является четной.

1'.7 Для набора общего положения синих точек B_1, B_2, B_3, B_4 и красных точек R_1, R_2, R_3, R_4 рассмотрим число I зацепленных разделенных пар $(\Box, \Box')$ таких, что ломаная $\Box$ содержит отрезок B_1R_1. Аналогично рассуждению задачи 1'.6 доказывается, что четность числа I не зависит от набора точек. В примере из задачи 1'.5 $I = 1$. Поэтому в каждом наборе число I нечетно, и поэтому в каждом наборе существует зацепленная разделенная пара замкнутых четырехзвенных ломаных.

1'.8 Утверждение задачи следует из задач 1'.6 и 1'.7.

2'.1 Например, можно раскрасить точки A_1, A_2, A_3 в синий цвет, а A_4, A_5, A_6 — в красный. Непосредственно проверяется, что полученный набор отрицателен.

2'.2 Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда некоторые две синие точки B_1, B_2 расположены по разные стороны от прямой, проходящей через некоторые две красные точки R_1, R_2. Тогда отрезок B_1R_1 не пересекает B_2R_2 и B_1R_2 не пересекает B_2R_1, что противоречит определению положительного набора.

2'.3 Пусть, от противного, $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$. Тогда при обходе треугольника $R_1R_2R_3$ все синие точки все время остаются справа. Это возможно, только если обход происходит по часовой стрелке, и все синие точки расположены внутри треугольника. По нашему предположению, в задачах 2'.2–2'.5 $N \geq 2$, поэтому есть хотя бы две синие точки. Проведем через них прямую. Какие-то две вершины треугольника расположены по разные стороны от этой прямой. Но тогда исходный набор не может быть положительным (доказывается аналогично задаче 2'.2).

2'.4 Так как исходный набор точек положителен, то по определению пересечение R_1B_1 и R_2B_2 положительно. Значит, при движении от B_1 к R_1 точка B_2 остается слева. Но тогда и при движении от R_1 к B_2 точка B_2 остается справа. По определению, тогда $R_1 > R_2$.

2'.5 Из задачи 2'.3 следует, что красные точки можно занумеровать так, чтобы $R_1 < R_2 < \cdots < R_N$. Из задачи 2'.4 следует, что эта нумерация — искомая.

2'.6 (Решение *Челнокова В.*) Занумеруем красные и синие точки слева направо. Тогда трилистник представляется ломаной $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$.

2'.7 Пусть дан положительный набор 5 красных и 5 синих точек. Занумеруем красные точки, как в задаче 2'.5. Занумеруем синие точки аналогичным образом. А именно, можно определить порядок '>' синих точек аналогично порядку красных точек и занумеровать синие точки в порядке возрастания (в смысле '>'). Рассмотрим ломаную $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$ (см. решение задачи 2'.6). Она представляет трилистник, что следует из такой леммы:

Лемма. Положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно перевести в набор точек из примера 1' непрерывным движением так, чтобы в процессе движения набор оставался в общем положении.

Идея доказательства. Рассмотрим точку B_1. Из нашей нумерации точек следует, что отрезки с началом B_1 расположены выше всех остальных. Поэтому мы можем переместить (допустимым образом) точку B_1 так, чтобы ее проекция попала в самую левую синюю точку на рис. 2', а сама точка B_1 располагалась очень высоко над плоскостью рисунка. Тогда и все отрезки с началом B_1 будут располагаться очень высоко. Поэтому то же самое можно сделать и с точкой B_2 — расположить ее очень высоко, но ниже точки B_2 так, чтобы ее проекция совпала со второй слева синей точкой. Действуя таким образом со всеми синими точками, а потом и с красными, мы переведем исходный набор точек в требуемый набор. Лемма, а вместе с ней и утверждение задачи 2'.7, доказано.

2'.8 (Небольшой экскурс в *рамсеевскую теорию графов.*) а) Утверждение легко доказать индукцией по $n+m$. Докажем базу $n+m=6$. Всюду в дальнейшем через $R(m,n)$ будем обозначать *минимальное* число вершин в полном графе с требуемым свойством. Из задачи 1.1 следует, что $R(3,3)=6$. Очевидно, $R(4,2)=4$. База доказана. Индукционный переход в случае $n=2$ или $m=2$ очевиден. При $m,n>2$ индукционный переход получается из оценки $R(n,m)\le R(n-1,m)+R(n,m-1)$. Действительно, рассмотрим полный граф с $R(n-1,m)+R(n,m-1)$ вершинами. Рассмотрим его вершину A. По принципу Дирихле найдется либо $R(n-1,m)$ выходящих из нее ребер первого цвета, либо $R(n,m-1)$ выходящих из нее ребер второго цвета. Рассматривая полные подграфы с вершинами в отличных от A концах указанных ребер, получаем требуемое. Утверждение доказано.

б) Формулировка очевидна, доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R(l,m,n)\le R(l-1,m,n)+R(l,m-1,n)+R(l,m,n-1).$$

в) **Теорема.** Для любых m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3 найдется такое $R=R(m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$, что при любой раскраске двудольного графа с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле) в три цвета для некоторого $1\le i\le 3$ найдется полный двудольный подграф i-го цвета с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй.

Доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R\le R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)+R(m_1,m_2-1,m_3,n_1,n_2,n_3)+R(m_1,m_2,m_3-1,n_1,n_2,n_3).$$

г) (*Идея доказательства.*) Сначала нужно доказать следующее вспомогательное утверждение:

Утверждение. Пусть дан полный двудольный граф с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле). Назовем *треугольником* три вершины, одна из которых лежит в первой доле, а две другие — о второй. Тогда для любых n_1,n_2,n_3 и m_1,m_2,m_3 найдется такое $R=R(m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$, что при любой раскраске всех треугольников в три цвета найдется полный двудольный подграф с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй, все треугольники которого имеют цвет i.

Доказательство производится индукцией по $\sum n_i+\sum m_i$. База индукции состоит в утвержениях задач 2'.7б и 2'.7в. Индукционный переход получается из оценки

$$R\le R(R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3),R(m_1,m_2-1,m_3,n_1,n_2,n_3),R(m_1,m_2,m_3-1,n_1,n_2,n_3)).$$

Здесь $R(x,y,z)$ — число из пункта 2'.7б. Для доказательства приведенной формулы нужно рассмотреть одну из вершин в первой доле, скажем A. Без ограничения общности, согласно пункту 2'.7б можно отметить $R(m_1-1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3)$ вершин во второй доле так, чтобы все треугольники с вершинами в A и двух отмеченных точках были первого цвета. Теперь наша формула получается из предположения индукции.

Для доказательства утверждения 2'.7г нужно рассмотреть одну синюю вершину B_1. Каждую тройку B_2,R_1,R_2 раскрасим в один из трех цветов в зависимости от того, положительна, отрицательна или нейтральна четверка B_1,B_2,R_1,R_2. Теперь проходит индукционный переход, использующий предыдущее утверждение и аналогичный доказательству этого утверждения. Тем самым утверждение задачи 2'.7г может быть доказано по индукции.

д) Согласно задаче 1'.1, нейтральных наборов при $n\ge 3$ не бывает. Поэтому пункт д) следует из пункта г).

2'.9 Теоремы Миёчи и Негами для трилистника следуют из задачи 2'.7, ее аналога для отрицательного набора и задачи 2'.8д для $n=5$.

2'.10 Лучший способ решить эту задачу — это воспользоваться задачами 2'.11 и 2'.12 из занятия "Доказательство теоремы Негами". Как и в решении задачи 2.1, для проверки лучше всего использовать веревку или нить.

Благодарности.

Данный цикл задач целиком совпадает с предложенным на 15-й летней конференции международного математического Турнира городов. Авторы цикла благодарны И. Дынникову и А. Скопенкову за полезные обсуждения.

[1] J. Conway, C. Gordon, Knots and links in spatial graphs, Journal of Graph Theory 7 (1983), pages 445–453.
[2] S. Negami, Ramsey-type theorem for spatial graphs, Graphs and Combinatorics 14 (1998), pages 75–80.
[3] M. Skopenkov, Embedding products of graphs into Euclidean spaces, Fundamenta Mathematicae 179 (2003), pages 191–197.
[4] В. Прасолов, М. Скопенков, Рамсеевская теория зацеплений, Математическое Просвещение, 3-я серия 9 (2005), стр. 108–115.
[5] Материалы 15-й летней конференции международного математического Турнира городов,
http://www.turgor.ru/lktg/2003/zacepl.ru/index.htm